Francia

I

SOBRE LA SITUACIÓN Y LA IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA FRANCESA (1)

Los planes de estudio vigentes en la segunda enseñanza francesa difieren de los que fueron promulgados en 1902, después de una encuesta de resonancia; pues la parte de esos planes que se refiere a las matemáticas, fué retocada, después de haber sido experimentada, y fueron hechas importantes modificaciones en 1905 y 1909.

Aunque no es cuestión de hacer aquí una historia completa de la enseñanza matemática en Francia, porque importa no ser demasiado extenso, parece a propósito dar algunas indicaciones para caracterizar el período anterior al régimen actual, tanto del punto de vista de los programas como del de las tendencias y aspiraciones del cuerpo de profesores o del público, y para explicar las vicisitudes del plan de estudios elaborado en estos últimos años.

Programas anteriores a 1891—Los programas de matemáticas anteriores a 1891 poco han variado; los diversos planes de estudios sólo se distinguen por la distribución de las materias entre las diferentes clases. Para dar una idea de esos programas, basta hacer una sucinta exposición del plan de estudios de 1885 a indicar las modificaciones ulteriores que pueden ofrecer algun interés.

De la 8.a a la 5.a clase (2) inclusivamente el programa comprendía la enseñanza del cálculo aritmético (números enteros, fracciones decimales, fracciones ordinarias) con aplicaciones a los problemas sobre intereses, aleacio-

(1) Informe presentado a la Com. Intern. de Enseñanza de la matemática. (Informe del profesor Ch. Bioche, del Liceo Luis el Grande)

(2) 8.a clase, es el 3.er año elemental—5.a es el 2.º año de secundaria.

nes, etc.; se daban además nociones sobre geometría usual, y se exponía el sistema métrico.

A partir del 3.er año se comenzaba el estudio de teoría con:

1.º La enseñanza de la geometría según el tipo de la geometría de Legendre, más o menos modificada en los detalles de exposición;

2.º Nociones de aritmética teórica;

3.º Los elementos del cálculo algebraico hasta la resolución de la ecuación de 2.º grado con una incógnita;

4.º La cosmografía descriptiva.

Esas diversas partes del programa estaban distribuídas en cuatro años, desde el 3.º, al que ingresaban a la edad de 13 años, hasta la retórica. El tiempo consagrado a las matemáticas era de 1 hora en 3.er año, 3 horas en 4.º y 5.º años y 2 horas en retórica.

En 7.º año, sección *Filosofía,* se consagraban 4 horas a la revisión de los programas anteriores de aritmética, álgebra y geometría; esta revisión era sancionada por pruebas escritas y orales del bachillerato.

Una clase, llamada de matemáticas preparatorias, permitía a los alumnos salientes del 4.º año, después de un año consagrado a estudiar el conjunto de los programas precedentemente indicados, entrar en la clase de matemáticas elementales preparatorias para el bachillerato en ciencias. En esta última clase los alumnos de matemáticas preparatorias volvían a encontrar los alumnos procedentes de retórica o de filosofía.

Conjuntamente con las clases de que se acaba de hablar, y que constituían la *enseñanza clásica*, había clases llamada de *enseñanza especial*, organizadas por Duruy en 1865, más directamente orientadas hacia la práctica, y que comprendían un programa de mecánica bastante extenso. Cierto número de alumnos de enseñanza especial, se reunían con sus compañeros de la enseñanza clásica sea en matemáticas preparatorias, sea en las elementales. Llegaban también a esas clases alumnos procedentes de

escuelas de enseñanza primaria superior, cuyos programas eran análogos a los de la enseñanza especial de los liceos.

El programa del bachillerato en ciencias comprendía el conjunto del programa de la sección *Filosofía* completado con ejercicios de álgebra, especialmente problemas de 2.º grado, con el estudio de la elipse, de la parábola, de la hélice, con la geometría descriptiva aplicada a la recta y al plano, con nociones de trigonometría y de mecánica (estática, dinámica y cinemática).

Los alumnos de matemáticas elementales tenían diez horas de clase de matemáticas por semana.

El Congreso de 1889. — El Congreso internacional de enseñanza superior y secundaria, reunido con motivo de la exposición de 1889, había adoptado, en su sesión de 8 de Agosto, la siguiente proposición:

Debe recomendarse, y por lo tanto establecerse, tres tipos distintos de enseñanza secundaria.

Esos tipos correspondían:

1.º A la enseñanza clásica, propiamente dicha.

2.º A la enseñanza especial, ya mencionada.

3.º A un tipo intermedio para el cual se ha propuesto el nombre de *humanidades latinas.*

Este último tipo diferiría, por una parte, de la enseñanza clásica, por la exclusión del griego y por el rol más importante que deberían tener los estudios científicos, y, por otra parte, de la enseñanza especial, por la conservación del estudio del latín.

La Sociedad para el estudio de las cuestiones de Enseñanza secundaria, tratando de realizar el voto del Congreso, estudió un plan de enseñanza completo. Para facilitar la adopción de ese plan creyó que debía inscribir en él las materias del programa del bachillerato en ciencias, expresando el sentimiento de « que los cursos « estuvieran tan recargados y que los alumnos dispusieran « de tan poco tiempo para la reflexión y la asimilación ».

Ese tipo de enseñanza correspondía a seis años. Los

tres primeros: «Nada de teorías: nada de abstracciones: « hacer razonamientos sobre problemas simples, con da- « tos precisos. No proponer sinó deberes cortos (durante « media hora, por ejemplo), hechos en clase bajo la vi- « gilancia del profesor.»

« En el segundo período (los tres últimos años), el « alumno necesita principalmente iniciativa y trabajo per- « sonal. Es, pues, indispensable que haya deberes hechos « a domicilio, sobre todo en los dos últimos años. Con « frecuencia es útil, en un primer estudio, dejar de lado « nociones secundarias o puntos delicados que impedirían « que el alumno comprendiera los elementos esenciales « y que tuviera una clara visión del conjunto de la cien- « cia. Es por esto que hemos llevado al último año com- « plementos que encontraran naturalmente su sitio en « una revisión de los cursos precedentes.» (1)

Aunque el proyecto mencionado no se realizó, es de interés señalarlo, por la fecha en que fué presentado.

Planes de estudio de 1890.—Dos planes de estudio fueron adoptados en 1890. El primero, que se encuentra en un folleto, titulado: *Instrucciones, programas y reglamentos*, no llegó a ponerse en vigencia, porque el mismo año se hizo una reforma de los estudios del bachillerato, que obligó a modificar los programas la víspera de la iniciación de las clases. Hablaré sólo del segnndo plan; pero, para evitar confusiones, era necesario advertir que el plan de estudios que entró en vigencia en 1890 difiere notablemente del que puede encontrarse en un documento oficial importante, publicado precisamente en la misma fecha.

El programa del bachillerato en ciencias, y por consiguiente, el de la clase llamada de matemáticas elementales que preparaba para el bachillerato, fué ligeramente modificado; la mecánica quedó reducida a la estática, permaneciendo iguales las demás materias.

---

(1) Informe sobre el proyecto de programa de matemáticas, de M. Martrot, profesor del Liceo San Luis.

Una modificación más importante del plan de estudios consistía en la supresión de la clase de matemáticas preparatorias; los alumnos que se dirigían, sea al bachillerato en letras, sea al bachillerato en ciencias debían, desde entonces, todos seguir los mismos estudios hasta la retórica inclusivamente, y pasar por las mismas pruebas de examen a que conducía esa clase. Al año siguiente ingresaban sea en la Sección de Filosofía, sea en la de Matemáticas [1] para pasar al fin del año una segunda serie de pruebas de examen, las que, si eran satisfactorias, daban derecho al título de Bachiller.

La enseñanza especial que había sido modificada diversas veces, y para la cual se había organizado un bachillerato particular fué transformada y tomó el nombre de *enseñanza moderna*. El objeto de esta enseñanza no era ya solamente enseñar a los alumnos cierto número de verdades adquiridas; según las instrucciones anexas a los programas, debía además contribuir a la cultura general del espíritu.

Los programas de matemáticas del bachillerato de la enseñanza moderna eran bastante semejantes a los programas del bachillerato en ciencias clásico. Sin embargo, importa señalar la introducción, en los complementos de álgebra enseñados en las clases de 6.º año de ciencias, nociones muy sucintas de geometría analítica y la noción de derivada con aplicaciones a la representación gráfica de funciones simples.

Conviene observar que los programas del concurso de ingreso en la Escuela especial militar de Saint-Cir comprendían nociones más extensas de geometría analítica y de teoría de las derivadas, y que en diversos cursos, o en obras de enseñanza, se trataba de dar nociones sobre la representación gráfica de las funciones y sobre las derivadas.

Los actuales planes de estudios.—Los programas de 1902

(1) Estas secciones corresponden al 7.º año.

redactados por sabios de valer indiscutible, pero que no tenían la práctica de la enseñanza secundaria, suscitaron enérgicas críticas. Las sesiones de discusión que siguieron, las conferencias organizadas por la administración universitaria en el museo pedagógico, en los primeros meses de 1904, pusieron de manifiesto cierto número de dificultades que los redactores de los programas de 1902 no habían tenido en cuenta. Para no extenderme demasiado, me limitaré a reproducir aquí algunas líneas de un discurso leído poco tiempo después de las sesiones a que me he referido, por M. Blutel, delegado de los agregados de matemáticas en el Consejo Superior de Instrucción Pública. Este discurso, pronunciado ante unos cincuenta colegas, que no tuvo oposición, precisa con autoridad la opinión general de los profesores de enseñanza secundaria.

« El fracaso de ciertas partes de nuestra enseñanza « me parece fatal si los actuales programas se conservaran « íntegramente. Si no podemos impedirlo, haciendo aceptar « las rectificaciones que creemos justas, tengamos por lo « menos el mérito de haberlo previsto, y pongamos a « salvo nuestra responsabilidad. Esto no nos será inútil « el día en que se haga el balance de una empresa en « la que hubiéramos colaborado con más alegría (no digo « con más entusiasmo), si nuestra actividad hubiera sido « solicitada mas bien que reglamentada ».

Habiendo aceptado la Administración la colaboración de los profesores de enseñanza secundaria, una revisión general de los programas de matemáticas se hizo de inmediato. Esta fué sancionada en 1905, y se complementó en 1909 con algunas pequeñas modificaciones en los programas de matemáticas de las clases literarias del segundo ciclo.

Para caracterizar la reforma de 1902 y las modificaciones subsiguientes, considero lo más apropiado citar un notable informe de M. Grevy, que sirvió de base a esas modificaciones.

« La reforma de 1902 fué la consecuencia de las diver-

« sas transformaciones debidas al considerable desarrollo « de las ciencias y de sus aplicaciones. A una enseñanza « cuya base era principalmente literaria, se ha querido « sustituir una enseñanza en que se diera más importan- « cia a las ciencias; quizá hubiera podido modificarse más « ligeramente un sistema de educación que, si no corres- « pondía a las necesidades actuales, habría, en otras épo- « cas, prestado verdaderos servicios; pero, la reacción « que no es particular a nuestro país, contra las antiguas « humanidades ha sido demasiado fuerte para que se limi- « tara a simples retoques de programas.

« La idea dominante de la reforma ha sido la de dar « la mayor amplitud posible a los estudios científicos y « a las lenguas vivas, a fin de que el alumno que salga « del liceo esté en condiciones de comprender las múlti- « ples aplicaciones industriales que encontrará desde el « principio de su carrera y no permanezca extraño al mo- « vimiento económico cuya importancia crece más cada « día.

« La innovación más interesante de la reforma de 1902 « ha sido la creación del primer ciclo B; [1] este ciclo ha « sido concebido de modo que ciertos alumnos puedan « abandonar el liceo al fin del 4.º año, provistos de un « caudal de conocimientos científicos suficiente como para « entrar en el comercio o en la industria, y que al mis- « mo tiempo prepare a los demás alumnos para empren- « der estudios de carácter más elevado ».

Uno de los rasgos más característicos del plan de estudios de 1905 es la distinción muy clara que establece entre el espíritu con que debe darse la enseñanza del primer ciclo y el que debe guiar en la enseñanza del segundo ciclo científico. Antes de 1902, la geometría se enseñaba a partir del 3.er año, sino siguiendo estrictamente el método de los *elementos de Euclides*, por lo me-

(1) El primer ciclo comprende los primeros 4 años de estudio. La edad media de los alumnos de primer es 1: años.

nos de una manera lógica que tenía grandes analogías con la enseñanza de Euclides; por lo contrario, en el plan de estudios de 1905, «la geometría (en el 1.er ciclo) debe enseñarse de una manera experimental por lo menos al tratar las nociones de rectas, planos, paralelas, etc.; todo elemento nuevo debe ser acompañado de su construcción precisa por medio de la regla y del compás y no de un trazado a pulso que no habitúa a la precisión; el dibujo geométrico debe ser el auxiliar de la enseñanza de la geometría».

En buenos términos, la enseñanza en el primer ciclo debe ser lo más concreta posible; es en las clases científicas del segundo ciclo que se vuelve a considerar, en 5.o año, la geometría plana y en 6.o año la del espacio para hacer el estudio lógico. Por otra parte, se verá más adelante la repartición de las materias en las diversas clases en el plan de estudios en vigencia.

La enseñanza matemática en las clases de letras. — Es oportuno también decir algunas palabras sobre la enseñanza de las matemáticas en las clases literarias del segundo ciclo. Los planes de estudio de 1902 redujeron en cada una de las clases de 5.o y 6.o año A y B, la enseñanza científica a una hora semanal de matemáticas y a una hora de física. Pronto se reconoció que era insuficiente el tiempo consagrado a las matemáticas. Además, el programa no era apropiado para la categoría de alumnos a que se debía aplicar; comprendía cuestiones demasiado difíciles de geometría — los teoremas del principio de la geometría del espacio — y no daba a los alumnos las nociones esenciales para las aplicaciones que se presentan en física. [1] Los profesores de física, lo mismo que los de matemáticas, han creído que había interés en hacer preceder la enseñanza de la física de una preparación matemática, y, además, que la enseñanza de la fí-

(1) En varios países latino-americanos, especialmente en el Uruguay, los aspirantes a médicos y abogados no estudian absolutamente matemáticas en los dos últimos años del bachillerato.

sica sería más provechosa si se concentrara en el 7.º año (llamado de *Filosofía*), en el cual los alumnos, por su edad y preparación, son más aptos para la reflexión.

El curso de física instituído en 5.º y 6.º año A y B, suprimió, pues, y llevó al año siguiente (7.º) el número de horas consagrado a la física y a la química, elevándolo a cinco horas semanales en vez de las tres horas que indicaba el plan de 1902.

El programa de matemáticas de 5.º y 6.º año, A y B, comprende ahora nociones de representación gráfica de las funciones, con aplicaciones al movimiento uniformemente variado, y nociones muy elementales de trigonometría. Esas nociones son suficientes para que los alumnos puedan resolver los diversos problemas simples que se presentan en la práctica, con el solo auxilio de las tablas de valores naturales de las líneas trigonométricas, cuyo empleo se ha hecho tan usual. El tiempo consagrado a las matemáticas, siendo de dos horas semanales, es suficiente para que se pueda insistir sobre las aplicaciones numéricas. Si los alumnos aprenden menos teoremas que antes, adquieren en cambio nociones interesantes y aprenden a utilizarlas. Seguramente que esto significa un progreso serio.

Observaciones generales. — El actual plan de estudios ofrece un interés particular a los matemáticos, porque el estudio de las ciencias, y principalmente el de las matemáticas, tiene más importancia que la que tuvo en el siglo XIX. Puede ser interesante hacer al respecto algunas observaciones que pongan de manifiesto la preocupación que tanto el público como el personal enseñante han tenido para llegar a asociar el estudio de las ciencias y el de las letras en la enseñanza secundaria.

Aun en las épocas en que la enseñanza se fundaba esencialmente en los estudios literarios, las matemáticas no eran consideradas como inútiles para la formación del espíritu: frecuentemente, jóvenes que no se destinaban a una carrera científica, completaban sus estudios secun-

darios con un año de matemáticas elementales, o preparaban su bachillerato en ciencias sea durante su año de filosofía, sea durante sus estudios en la Facultad de letras o en la Facultad de derecho.

En el Congreso de los profesores de enseñanza secundaria, reunido en Septiembre de 1900, es decir en víspera de la reforma de 1902, M. Clairin, representante de los agregados de gramática en el Congreso Superior, pedía que « se declarara expresamente que en « una ense- « ñanza *clásica* los estudios científicos tienen un sitio mar- « cado, importante, al lado de los estudios literarios » y proponía el siguiente considerando: « El Congreso, consi- « derando que la enseñanza clásica debe ser una ense- « ñanza de cultura general, que asegure el desarrollo de « todas las facultades del alumno, y que los estudios cien- « tíficos deben por lo tanto tener en ella una parte im- « portante... » Esta proposición fué votada por unanimidad. El hecho que acabo de citar me parece bastante significativo para que sea necesario citar otros.

Por otra parte, en diversas ocasiones, antiguos alumnos de la Escuela Politécnica han insistido sobre el interés de los estudios literarios para los jóvenes que se destinan a las carreras científicas. Como ejemplo, me limitaré a citar lo que escribía M. A. Lebrun, en un informe presentado a la Cámara de diputados en 1910: « No hay « buena cultura general sin el estudio de las letras, y, « tanto en la Politécnica como fuera de ella, esta cultura « debe ser vivamente estimulada. Con demasiado frecuen- « cia se cree que sus alumnos, celosos por encerrarse en « el dominio científico en que se mueven sólo tienen « indiferencia por las letras. Es un grave error. Los ver- « daderos amigos de la escuela siempre han deseado « para ella un reclutamiento que ofreciera, a la vez, con « bellas esperanzas científicas basadas en una elección « juiciosa de los candidatos, preciosas realidades litera- « rias, frutos de fuertes estudios hechos ».

Pasaré ahora a otro orden de ideas. Con preferencia

se ha reprochado a la enseñanza matemática ser demasiado teórica y demasiado abstracta. Sin embargo, los que dan esa enseñanza frecuentemente se han preocupado de las aplicaciones. En las discusiones pedagógicas que tuvieron lugar fuera de la elaboración de los programas, en las instrucciones agregadas a éstos, a menudo se indicó el rol importante que deben tener las aplicaciones, cálculos numéricos y construcciones gráficas.

Las aplicaciones numéricas constituyen un excelente ejercicio, si se llama la atención de los alumnos sobre ciertos detalles, orden de aproximación que se puede alcanzar, manera de obtener los resultados de este orden con cálculos simples por medio de fórmulas aproximadas, etcétera. Las aplicaciones gráficas permiten también observaciones interesantes; puede hacerse notar que una construcción que debe efectuarse sobre una hoja de dimensiones limitadas, existe un interés particular en buscar la construcción en que se emplee el menor número de líneas para que la figura no esté sobrecargada; así se es conducido a buscar la resolución más *económica,* utilizando, ocasionalmente, líneas ya trazadas. Parece inútil insistir más.

Pero conviene señalar este voto, con frecuencia emitido por los profesores de matemáticas y pocas veces analizado: Que el dibujo geométrico sea confiado, por lo menos en parte, al profesor de matemáticas. Sesiones de dibujo geométrico permitirían completar la enseñanza teórica dada en clase y la harían ciertamente más provechosa.

SUMARIO DE LOS PROGRÁMAS DE MATEMÁTICAS DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA EN 1910-11

Clases preparatorias

Edad de los alumnos, 6 a 8 años.—Duración, dos años. Principios de la numeración.— Operaciones elementales

con números enteros poco elevados. — Nociones sobre el sistema métrico.

Clases elementales

Edad de los alumnos, 8 a 10 años.— Duración, dos años. Revisión del programa precedente. — Números decimales. — Regla de tres. — Geometría intuitiva utilizando modelos.

Primer ciclo (4 años)

Los alumnos ingresan en el primer ciclo de los estudios secundarios, en edad de 10 a 11 años.

El primer Ciclo A, comprende el estudio obligatorio del latín desde el 1.er año (clase 6.a) y el estudio facultativo del griego a partir del 3.er año. El 1.er Ciclo B, sin lenguas antiguas, comprende programas científicos más completos que los del Ciclo A.

Primer Ciclo A

1.er año A. — (2 horas semanales de clase) — Cálculo: números enteros, números decimales, fracciones.

2.o año A. — (2 horas semanales) — Sistema métrico, medida del tiempo, velocidad. Reglas de tres. — Empleo de letras para representar incógnitas, fórmulas simples.

3.er año A. — (2 horas semanales) — *Aritmética.* — Productos. Caracteres de divisibilidad. Números primos. Proporciones. — Regla para extraer la raíz cuadrada. — *Geometría.* — Línea recta y círculo.

4.o año A. — (3 horas semanales). — *Aritmética.* — Ejercicios sobre el sistema métrico y las proporciones. — *Álgebra.* — Números positivos y negativos. — Nociones elementales de cálculo algebraico. — Ecuaciones numéricas de 1.er grado, con una o con dos incógnitas. — *Geometría.* — Revisión. — Líneas proporcionales. — Triángulos

semejantes. — Homotecia. — Relaciones métricas. — Polígonos regulares. — Áreas.

Primer Ciclo B

1.er año B. — (4 horas semanales, de las cuales 1 de dibujo). — *Cálculo.* — Números enteros, fracciones, sistema métrico, regla de tres. Problemas de aligación, intereses, etc. — *Dibujo geométrico.* — Empleo de la regla y del compás. — Aplicaciones a motivos sencillos de decoración. — Lavado.

2.o año B. — (4 horas semanales, de las cuales una para el dibujo geométrico). — *Cálculo.* — Revisión: problemas sencillos que conducen a ecuaciones de 1.er grado. — *Geometría.* — Línea recta y círculo. — Problemas de construcción. — *Dibujo geométrico.* — Aplicaciones del curso; figuras en las que entran rectas y círculos. Lavado.

3.er año B. — (5 horas semanales, de las cuales 1 hora de dibujo geométrico). — *Aritmética.* — Fracciones. Regla para extraer la raíz cuadrada. Progresiones. Aritmética comercial. — *Geometría.* — Líneas proporcionales. Triángulos semejantes. Homotecia. Polígonos regulares. Áreas. Construcción de la cisoide, de conchoides, etc. — *Dibujo geométrico.* — Como en 2.o año, y además construcción de lugares geométricos y trazado de curvas a pluma.

4.o año B. — (4 horas semanales). — Álgebra. — Números positivos y negativos. — Elementos de cálculo algebraico. — Ecuaciones de 1.er grado con una o con dos incógnitas. — Ecuaciones de 2.o grado con una incógnita. — Representación gráfica del trinomio y de $\frac{a x + b}{a' x + b'}$. Uso de los logaritmos. — *Geometría.* — Geometría del espacio. Poliedros. — Cono. Esfera. Sombra de los cuerpos. Levantamiento de planos.

Segundo Ciclo (2 años)

Las clases del segundo ciclo se dividen en 4 categorías.

A. — Latín - griego.

B. — Latín - lenguas vivas.

C. -- Latín - ciencias.

D. — Ciencias - lenguas vivas.

A la salida del segundo ciclo los alumnos se presentan al examen de la primera parte del bachillerato; deben entonces tener 16 años, o, si no los tuvieran cumplidos, obtener dispensa de edad para poder presentarse a examen.

Secciones literarias

5.º año A y B. — (2 horas semanales). — *Álgebra.* — Revisión del programa del año anterior. — Movimiento uniforme. Variaciones de $a\ x + b, x^{2}, \frac{1}{x}$ con representación gráfica. — *Geometría.* — Geometría del espacio. — Rectas y planos, paralelas, perpendiculares. Nociones sobre el cilindro, el cono recto, la esfera.

Fórmulas para evaluar las superficies y volúmenes.

6.º año A y B. — (2 horas semanales). — *Álgebra.* — Ejercicios sobre las ecuaciones de 1.er grado. — Ecuaciones de 2.º grado con una incógnita. Variación del trinomio de 2.º grado y de $\frac{a x + b}{a' x + b'}$ *Geometría.* — Medida de los ángulos (grados, radiantes). Figuras semejantes. Relaciones métricas, con nociones de Trigonometría. Fórmulas usuales de superficies y volúmenes. Nociones sobre la simetría.

Secciones científicas

5.º año C y D. — (5 horas semanales) — *Álgebra* — Elementos de cálculo algebraico. — Problemas de 2.º grado. Noción de la derivada y aplicaciones simples. Progresio-

nes. Logaritmos. Uso de las tablas logarítmicas — *Geometría.* — Estudio lógico de la geometría plana. Recta. Círculo. Desplazamiento en el plano. Homotecia. Polígonos regulares.

6.º año C y D. — (5 horas semanales) — *Geometría* — Geometría de la recta y del plano en el espacio. Poliedros. Cono. Esfera. Superficies y volúmenes. — *Geometría descriptiva.* — Cuestiones relativas a las rectas y a los planos. Representación de las figuras con un plano de proyección y cotas, o con dos planos de proyección. — *Trigonometría.* — Estudio de las funciones trigonométricas. Fórmulas usuales. Resolución de los triángulos — *Álgebra.* — Derivadas de funciones simples; aplicaciones a la Geometría y a la Trigonometría. Estudio del movimiento rectilíneo por medio de las derivadas.

Clases de matemáticas A y B

Esta clase prepara para la segunda parte del bachillerato (parte científica). El número de horas de clase es de 8 por semana.

Aritmética. — Teoría de las operaciones aritméticas, con nociones sobre los errores. Elementos de la teoría de los números primos y de las fracciones decimales periódicas. — *Álgebra.* — Revisión y complemento de los programas procedentes. Ecuación de la línea recta, trazado de las curvas representativas de las funciones simples algebraicas o trigonométricas. Derivada del área de una curva considerada como función de la abscisa. — *Trigonometría.* — Revisión y aplicación al levantamiento de planos. — *Geometría.* — Revisión. Ejes radicales. Polares. Inversión. Teoría de los vectores. Proyección central. Estudio de la elipse, de la hipérbola y de la parábola. Problemas de construcción relativos a esas curvas. Ecuaciones reducidas. Definiciones comunes. Secciones de los conos y cilindros de revolución. — *Geometría descriptiva.* — Recta, plano, círculo. Conos, cilindros y esfera. Secciones planas.

Sombras. Nociones sobre las cartas topográficas. — *Mecánica* - Cinemática, con aplicaciones a los mecanismos. Dinámica y estática del punto, con o sin frotamiento. Estática del sólido. Máquinas simples, en estado de reposo o de movimiento. — *Cosmografía*. — Esfera celeste. Tierra, Sol, Luna y Planetas.

Clase de Filosofía

El programa de la clase de Filosofía comprende un curso obligatorio de Cosmografía de una hora por semana, durante un semestre, y un curso facultativo de matemáticas de dos horas semanales durante todo el año. Este curso tiene por objeto dar a los alumnos nociones sobre los métodos de los griegos comparados con los métodos modernos, sobre la geometría analítica, sobre la representación gráfica de las funciones, sobre las derivadas y en general sobre los elementos del cálculo infinitesimal. El fin esencial de esta enseñanza debe ser «contribuir al «desarrollo filosófico de los alumnos, haciéndoles adquirir «nociones importantes».

Horarios comparados

	Total de horas de clase	Horas de matemáticas
Clases preparatorias	20	3
Clases elementales	20	3
1.er año A.	23	2
1.er año B.	22	4
2.º año A.	23	2
2.º año B.	22	4
3.er año A.	23	2
3.er año B.	24	5
4.º año A.	24	3
4.º año B.	24	4
5.º año A.	24	2
5.º año B.	24	2
5.º año C.	27	5
5.º año D.	27	5
6.º año A.	23	2
6.º año B.	21	2
6.º año C.	26	5
6.º año D.	27	5
Matemáticas	27/12	8
Filosofía	19/12	1 semestral

II

ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA (1)

Los nuevos programas de enseñanza secundaria han separado claramente las dos partes de la aritmética, la parte práctica enseñada en todas las clases del primer ciclo, y la parte teórica reservada, por razón de su carácter abstracto, al último año de los estudios secundarios propiamente dichos, a la clase de matemáticas.

(1) Informe de A. Lévy, profesor del Liceo San Luis, presentado a la Comisión internacional de enseñanza matemática.

Los alumnos del primer ciclo que pertenecen a la división A, teniendo menos horas consagradas a las matemáticas, deben emplear los cuatro años del primer ciclo en familiarizarse con las diferentes nociones, los cálculos y los problemas simples de la aritmética. En el 1.er año se les enseñan las operaciones sobre las fracciones y los números decimales. En 2.o año, se recomienda instruirlos en el sistema métrico, el tiempo, las velocidades (y a ese respecto hacerles hacer algunos ejercicios sencillos sobre los cambios de unidad), los cálculos de intereses, de descuentos, y los problemas sencillos referentes a las mezclas y aligaciones.

Comenzarán a representar los números por letras, en particular las incógnitas de sus problemas, los que nunca deberán dar lugar más que a ecuaciones de 1.er grado.

En 3.er año se hace el estudio de los números primos, de las proporciones, la regla práctica para la extracción de la raíz cuadrada. Para el 4.o año sólo resta ocuparse de las magnitudes directamente e inversamente proporcionales y resolver ecuaciones numéricas de primero y de segundo grado.

La división B, que consagra más tiempo a las matemáticas (1) y que lleva un poco más lejos que la división A el estudio de la geometría y de los elementos del álgebra, sólo acuerda los tres primeros años de su ciclo a los ejercicios de aritmética propiamente dichos. Sólo agrega al programa de la división A las progresiones aritméticas y geométricas y nociones de aritmética comercial, que se dan en 3.er año.

Excusado es decir que esos programas no se aplican literalmente. El profesor vuelve con frecuencia sobre las materias enseñadas en los años precedentes y a veces superpone sus ejercicios sobre cuestiones del año siguiente. Tampoco se satisface con dar simplemente reglas prácticas para efectuar las operaciones de que se ocupa, sino

(1) Véase el estado de la pág. 437

que las explica en la medida que cree pueden ser comprendidas. Trata de hacer nacer en el espíritu de los buenos alumnos esa necesidad de explicación y de justificación, que es la verdadera curiosidad matemática, fuente de trabajo y de progreso.

Con frecuencia también despierta el interés y ejercita la sagacidad por la investigación de pequeñas cuestiones sencillas de análisis combinatorio.

Los resultados obtenidos, por otra parte, son muy buenos, como lo expresa el informe de M. Fontené, inspector de la Academia de París.

« La aritmética se enseña generalmente bien en las « clases elementales y en las primeras clases de secun« daria, donde se emplean los cuadros murales, y aun a « veces el procedimiento de La Martiniere con la piza« rra; se practica el cálculo mental y se pide a la vida « corriente, a la industria y al comercio problemas de « naturaleza concreta a los cuales se aplican las leyes « del sistema métrico y el cálculo de las fracciones; a « veces medidas reales se ponen al alcance de los alum« nos, experiencias simples suministran los datos de al« gunos problemas, y se comprueba la verosimilitud de « los resultados obtenidos. »

Vemos, pues, que la aritmética práctica ha ejercido sus legítimos derechos durante los cuatro años del primer ciclo, ¿cuáles van a ser esos derechos en el segundo ciclo en el cual ya no están explícitamente escritos en el código?

Para las divisiones A y B el porvenir nos deja alguna esperanza, porque aprovechará las lecciones del pasado.

Según el programa de 1902, de las dos horas de enseñanza científica asignadas a esas clases literarias (en 5.º y 6.º año), una debiera consagrarse al estudio de las matemáticas, la otra al de la física y la química. Pero los profesores de física pronto vieron que su tarea era ingrata frente a alumnos tan débiles en matemáticas, tan ingrata como la tarea de sus colegas encargados de en-

señar en una hora por semana la geometría y el álgebra a jóvenes, cuya mayor parte no tienen disposiciones para las ciencias. La escasa importancia dada a las ciencias en los exámenes del bachillerato no era la más apropiada para estimular el celo de los candidatos.

Así, el Consejo superior de instrucción pública ha juzgado conveniente reservar la enseñanza de la física y de la química a la clase de filosofía, y dedicar las dos horas de ciencias del 5.º y del 6.º año a la enseñanza del profesor de matemáticas. Para que los alumnos obtengan todo el provecho que debe resultar de esa enseñanza, será conveniente que el cálculo (aunque no especificado en el programa) tenga suficiente amplitud — el cálculo numérico en todas sus formas puede y debe presentarse en los ejercicios de geometría y de álgebra.

Quizá se obtengan resultados completamente satisfactorios con las medidas actuales, habiendo tomado nuevamente las matemáticas su influencia en los exámenes orales del bachillerato; pero, creo que el fin se alcanzaría con más seguridad si se exigiera de los candidatos una pequeña composición escrita en la que se le propusieran dos cuestiones:

1.º Un problema sencillo que se resuelva por operaciones numéricas de primero o de segundo grado, o por cálculos sin empleo de letras;

2.º Una cuestión fácil del curso de geometría que pruebe que sean capaces de un razonamiento abstracto.

Acabo de ocuparme de las dos secciones que se ha convenido en llamar literarias ¿qué diré de las dos divisiones científicas C y D en las que se estudian las matemáticas con ardor y a menudo con éxito? ¿No se descuidan un poco las aplicaciones numéricas? Llevados por programas recargados y por el encanto de iniciar a jóvenes inteligencias animadas de instruirse en las bellezas matemáticas, ¿no se pierde de vista, con demasiada frecuencia, el instrumento, el útil del que quiera aplicar sus conocimientos a la práctica?

He enseñado durante muchos años en esas clases y declaro que no estoy exento de reproches, he descuidado a veces los números

No creo ser el único — pues he visto muy buenos ejemplares de bachillerato, muy buenos, excluyendo la aplicación numérica. — ¡Qué escasos son los alumnos que después de haber demostrado sus conocimientos geométricos evaluando una magnitud en función de una variable, que, después de haber aplicado con destreza las reglas del álgebra al estudio de esa función, saben calcular exactamente el valor de un máximo!

Creo que es necesario que reaccionemos contra la educación poco práctica que nosotros mismos hemos recibido, y que impongamos a nuestros alumnos más ejemplos numéricos en los deberes que nos remiten. Pero: ¿dispondrán de tiempo? ¿tendremos tiempo de corregirlos en clase? Esforcémonos: hagamos lo mejor posible.

Nuestros jóvenes están próximos a terminar sus estudios secundarios, entran en la clase de matemáticas, no les dejaremos partir sin haberles explicado los razonamientos que han suministrado nuestras reglas de cálculo. Van a estudiar la aritmética teórica, comprendiendo: la numeración decimal, las operaciones, la divisibilidad, la investigación del máximo común divisor, del mínimo común múltiplo de varios números. Las propiedades elementales de los números primos — las fracciones ordinarias, la reducción de fracciones ordinarias en fracciones decimales. La extracción aproximada de las raíces cuadradas, la razón de dos números, las razones de las magnitudes — y en fin la definición del error absoluto y del error relativo — la determinación superior del error cometido en una suma, una diferencia, un producto, un cociente, conociendo los límites superiores que afectan a los datos. He citado casi textualmente el programa oficial.

Pero, ¿ese programa está exento de crítica? ¿lo saben los alumnos? Quisiera poder transcribir aquí todo el artículo escrito por M. Lebesgue, profesor de la Facultad

de ciencias de París, en la *Revista de la enseñanza de las ciencias.*

« Soy de opinión que debe reducirse la aritmética a la « numeración y al estudio de las cinco operaciones: adi- « ción, sustracción, multiplicación, división, extracción de « raíces. Acepto en rigor, y como una especie de ejercicio « de aplicación, el mínimo común múltiplo y el máximo « común divisor. Pero eso es todo.

« Después de muchos años que actúo como examinador « de bachillerato, he tenido la posibilidad de asegurarme « que, sobre diez candidatos, nueve sólo ven en la teoría « de los números primos una serie de cuestiones difíciles « del examen, fáciles de preparar por un simple esfuerzo « de memoria. Creo poder deducir que para esos nueve « sobre diez alumnos, la enseñanza de la teoría de divi- « sores primos no da provecho alguno, ni para su aclara- « ción matemática, ni para la formación de su espíritu, « etcétera » y después más adelante: « Concibo, desde « luego, la expresión de los sentimientos de todos los que « gustan de la perfecta belleza de esas teorías aritméticas; « pero nosotros no enseñamos para procurarnos goces « estéticos, y temo que muy pocos sean los que procu- « ramos a nuestros alumnos. »

No pienso como M. Lebesgue: conviene que nuestros alumnos vean que las matemáticas tienen una estética para nosotros, y que la tendrán para ellos — no quisiéramos que ellos sólo las consideraran como un medio.

¿Cuál es la razón de que los candidatos al bachillerato no tengan mejor preparación en aritmética? Creo que esa deficiencia tiene por causa el gran número de conocimientos matemáticos que deben adquirir, sin poder consagrar más de 8 horas de clase semanales para adquirirlas.

Me consta que muchos profesores pretenden, y a menudo con razón, que podría eliminarse de las materias enseñadas, las que no ofrecen ningún carácter de utilidad. Pero, es sobre esta utilidad que es necesario enten-

dernos, pues nadie pretenderá restringir esa utilidad solamente a las necesidades de la práctica; — sino que la mayoría entenderá por útil la necesidad de los conocimientos actuales para adquirir los conocimientos futuros. Voluntariamente adheriría a esa opinión si ella me permitiera conservar toda cuestión que en sí misma forme un todo, un todo que encierre alguna belleza, algún método, y por lo tanto una virtud educativa para el espíritu.

Por ejemplo, esa teoría de los números primos—y para defenderla séame permitido aportar otro argumento.— M. Lebesgue admite que ejercitemos a nuestros alumnos en encontrar el máximo común divisor de dos números: pero, ¿no seremos conducidos a hacerles ver que todos los divisores comunes de dos números, son los divisores de ese máximo común divisor? Cuando los mejores alumnos nos pregunten cómo se encuentran todos esos divisores, ¿qué les contestaremos?

Declaro que, recorriendo el programa de aritmética, lamentaría que se suprimiera cualquiera de esas cuestiones. Y diría a los que no son de mi opinión: Recordad la época de nuestros estudios escolares ¿no las habéis estudiado con gusto?, no las aprendistéis bien? Para terminar este ya largo artículo, voy a enumerar algunos de los textos que tenemos en uso.

En el primer ciclo he visto recomendar mucho el texto de M. Grevy, que da explicaciones claras y sencillas, fáciles de comprender a los principiantes. La obra de Bourlet ha tenido gran éxito, está redactada de tal manera que, con el auxilio de ella, un profano puede enseñar a niños, contiene muchos ejercicios muy bien elegidos. M. Bourlet ha sabido complacer no solamente a los jóvenes alumnos, sino también a sus padres: ha publicado, además, el libro del profesor, es decir la colección de los ejercicios de su obra, con las soluciones correspondientes, lo que facilita a los padres el contralor del trabajo de sus hijos.

Debo señalar también *la iniciación matemática,* que de-

bemos a M. Laisant, — buena colección de ejercicios para ejercitar la inteligencia y despertar el gusto por la ciencia en los futuros matemáticos. — M. Tannery ha escrito una excelente obra para los profesores del segundo ciclo; ha sido leída, estoy seguro, por todos los que enseñan en Francia, y de ella habrán sacado ideas y conocimientos. En poder de los alumnos, se ven también los excelentes tratados de Grevy, de Cahen, de Combette, y también el de Humbert, que no ha temido introducir los números negativos. Pero, ¿qué se ha hecho de la obra de Serret, ese libro tan completo, tan perfectamente escrito, de tan agradable lectura? Pero, ¿dónde están las nieves de antaño?

III

ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA [1]

Recordaremos que la enseñanza está dividida, desde 1902, en dos ciclos. El segundo se compone de tres años; los alumnos lo siguen, término medio, entre los 14 a 17 años de edad. Damos primeramente el programa de álgebra de este segundo ciclo para las clases en las cuales las ciencias tienen el rol más importante (latín - ciencias, ciencias - lenguas vivas).

Nos bastará examinar los dos primeros programas. Se ha imaginado los dos ciclos encarando para los alumnos la posibilidad de que abandonen el colegio o el liceo, al terminar el primer ciclo; los mejores reciben certificado de estudios secundarios.

Los alumnos del segundo ciclo pasan, ante las facultades, un examen de bachillerato, dividido en dos partes, al fin de cada uno de los dos últimos años (6.º y 7.º). Los que desean continuar sus estudios científicos, pueden ingresar en la clase de *Matemáticas especiales*: teniendo en cuenta esta posibilidad es que figuran ciertas cuestiones en los programas de las divisiones C y D.

(1) Informe para la Comisión internacional de enseñanza de las matemáticas, por M. Guitton, profesor del Liceo Enrique IV.

(El profesor Guitton transcribe enseguida el programa de álgebra del segundo ciclo correspondiente a 1902-1905: lo suprimo, pues ya figuran sintéticamente los programas de matemáticas en el informe del profesor Bioche [1])

. . . .

Los programas liceales indican lo que en Francia se llama *álgebra elemental.* Poco interés tiene averiguar si las materias señaladas en esos programas, pertenecen realmente al álgebra; es indudable que casi todas están bien unidas entre ellas y se aclaran mutuamente y esta es razón suficiente para estudiarlas juntas. El álgebra difiere de la aritmética cuando se introducen sistemáticamente los números positivos y negativos; desde luego debemos averiguar la preparación que tienen lo alumnos para recibir esa enseñanza.

Preparación. — Al abandonar el primer año, los alumnos conocen bien el cálculo aritmético; en segundo y en tercer año, estudian la aritmética del punto de vista un poco teórico.

Como la principal dificultad, para aprender el álgebra, es habituarse al cálculo literal, ésto convendría que se hiciera lo más pronto posible.

En segundo año, se estudian las operaciones con los números enteros; representándolos por medio de letras, se traducen por fórmulas las reglas encontradas: la continuación de los estudios mostrará la permanencia de esas fórmulas.

Se empieza por las propiedades de la suma: después, se dirá que ella es una operación conmutativa y asociativa. Vienen en seguida las reglas, restar o multiplicar una suma o una diferencia; una aplicación es el desarrollo del cuadrado de $a + b$... en fin, los productos de factores y las elevaciones a una potencia suministran nuevas fórmulas que volverán a encontrarse en todo el curso de los estudios.

---

(1) Véase páginas 430 a 436.

Los alumnos ya se encuentran en condición de resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros, con tal que las soluciones sean enteras o que no conduzcan a sustracciones imposibles. Después resolverán ecuasiones semejantes por procedimientos mecánicos; pero, en un primer estudio es preciso justificar una regla cada vez que se aplica. Cuando un alumno ha escrito las ecuaciones de un problema, sólo ha dado una imagen del enunciado; sabe de inmediato, por procedimientos naturales, sacar de ella la solución. El método es tan simple que, para hacer más difíciles ciertos exámenes en que figuran cuestiones de cálculo, sólo se aceptan las soluciones, « empleando la aritmética », ¡como si se saliera de la aritmética representando un número por una letra! Cuando no se pueden emplear las letras, problemas fáciles se convierten en verdaderos rompecabezas y exigen de los candidatos un largo entrenamiento: su tiempo podría ser más útilmente empleado.

En tercer año viene el estudio de las fracciones: allí también es preciso habituarse a representar por letras los términos de esas fracciones; después, en el estudio de las razones, una fracción podrá ser representada por una letra única: se encuentran siempre las mismas fórmulas.

Se aprende también la extracción de la raíz cuadrada: se sabía ya calcular dos números conociendo su suma y su diferencia; la relación que existe entre la suma, la diferencia y el producto permite ahora calcular dos números conociendo su producto y su suma (o su diferencia), y esto es ya la resolución de la ecuación de segundo grado.

Números algebraicos. — Se definen los números positivos y negativos y se llaman « números algebraicos » llamando « aritméticos » a los ordinarios. Algunos autores creen que tales expresiones deben cambiarse, y llaman a los primeros « números relativos » y a los otros « números absolutos ». Este cambio no nos parece necesario, pues todos

comprenden, cuando a una operación se le da el sentido algebraico, que ella se hace sobre números positivos o negativos. No ignoramos que la expresión « número algebraico » tiene otro sentido en una parte muy abstracta de las matemáticas superiores; es allí donde podría cambiarse, no siendo por otra parte, posible ninguna ambigüedad.

Habiendo definido los números algebraicos, se pasa a las cuatro operaciones elementales. Se dice que se entiende por suma o producto de dos números; la sustracción y la división son las operaciones inversas de la adición y de la multiplicación.

Se hacen dos convenciones: queda por verificar que, si, cómo en aritmética, se representan los números algebraicos por letras, se encuentran las fórmulas conocidas. Sería muy interesante, pero más largo, mostrar cómo, para asegurar la permanencia de esas fórmulas, somos conducidos a hacer esas convenciones.

La principal dificultad es mostrar que una suma no depende del orden de los términos. En un primer estudio se atribuye a un número positivo la idea de agregar y al número negativo la idea de sustraer (se parte de un número arbitrario suficientemente grande); la suma buscada da la operación única que puede reemplazar las operaciones sucesivas representadas por esos números; el orden de esas operaciones es arbitrario, según se ha visto en aritmética.

Teóricamente, basta mostrar que en la suma de tres números se pueden reemplazar los dos últimos por su suma efectuada. Con frecuencia se procede con la imagen siguiente:

Consideremos una recta dirigida y vectores llevados por esa recta (eje); según que esos vectores están o no en el sentido de esa recta, afectemos su medida del signo « más » o « menos » y tendremos así « la medida algebraica de un vector llevado por ese eje ». Recíprocamente, a números algebraicos pueden hacerse corresponder a vec-

tores; a la adición de dos números algebraicos corresponde la adición geométrica de dos vectores: el teorema de álgebra se demuestra geométricamente.

Señalemos, al pasar, el empleo cada vez más frecuente de la palabra «vector». En la cuestión precedente, se empleaba la palabra «segmento»: es preciso conservar a esta última su significado primitivo de porción de recta.

En la enseñanza elemental, en geometría, en mecánica, en física, se emplean mucho los vectores; como se hace en otros países, deberíamos acostumbrarnos a representar cada uno de ellos por una letra, e introducir las nociones de producto escolar y de producto vector: las fórmulas del álgebra se aplican casi siempre sin ningún cambio y muchas demostraciones toman una forma más simple.

Después de las cuatro operaciones fundamentales viene la definición de la raíz cuadrada de un número *a*. A la de un número negativo no corresponde ningún número a la de un número positivo corresponden dos que son opuestos: el símbolo $\sqrt{a}$ representa siempre la raíz aritmética.

Primeras aplicaciones.—Son principalmente las que resultan de la determinación de un punto sobre un eje, por su abscisa: relación entre las abscisas de dos puntos que dividen armónicamente un segmento, relación entre las abscisas de un punto del eje principal de un espejo (o de una lente) y de su imagen, etc. Gracias al empleo de los números algebraicos, una misma fórmula conviene a todos los casos: deben presentarse, pues, demostraciones independientes de los casos de figura.

En el mismo orden de ideas, se considera la fórmula del trabajo en el caso más simple, la fórmula del movimiento uniforme en la que se da un sentido algebraico al tiempo y a la velocidad.

Coordenadas cartesianas. — La aplicación más importante de la determinación de un punto en el plano por sus coordenadas y la determinación de la ecuación de la línea recta.

Encontrada la ecuación de esa línea, tendremos una representación geométrica de las variaciones de la función de primer grado; sumas así conducidas a la representación de las variaciones de las funciones de una variable por curvas; esas variaciones nos informan, además, sobre los cambios de signo de esas funciones y de sus raíces.

A una ecuación de primer grado con dos incógnitas corresponde una línea recta. El problema de álgebra: resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado, se reduce al problema gráfico, encontrar el punto común de dos rectas.

De una manera general la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene por la intersección de dos líneas: el problema es particularmente simple cuando sólo hay que trazar rectas y círculos.

Variaciones de algunas funciones. — Las primeras que se presentan después de $ax+b$, son x^2 y $\frac{1}{x}$ o ax^2 y $\frac{a}{x}$ (y también ax^2+b y $\frac{a}{x}+b$). La primera representa una parábola, y es importante para el estudio de las leyes de la caída de los cuerpos; la segunda es una hipérbola equilátera, representa la ley de Boyle—Mariotte, y ofrece un primer ejemplo de discontinuidad.

El programa pide también el estudio ax^2+bx+c y $\frac{ax+b}{ax'+b'}$, esas funciones se reducen a las dos precedentes cuando han sido convenientemente transformadas; se dice entonces que se buscan directamente sus variaciones. Una de sus aplicaciones es la construcción de las raíces de la ecuación de segundo grado por la intersección de una recta y de la parábola $y=x^2$.

Debemos decir, sin embargo, que los procedimientos de que acabamos de ocuparnos no son absolutamente directos, los alumnos no los retienen y solicitan otros más sencillos.

Otro tanto diremos de las cuestiones del curso de sexto año: estudiar las variaciones de las mismas funciones en las que las variables están reemplazadas *sen x, cos x, tang x*. Como esas tres líneas trigonométricas no varían siempre en el mismo sentido que x, resulta una complicación que desorienta a muchos alumnos. Esas cuestiones deberían llevarse a la clase de «Matemáticas» (7.º año) para que pueda aplicarse el método de las derivadas.

Sin embargo, debe hacerse una excepción para la función $a \cos x + b \operatorname{sen} x$ tan importante en las aplicaciones. Por medio de un cambio conveniente de origen, no contiene más que un término del que se conoce las variaciones.

Derivadas. — Cuando se quiere saber si una función aumenta o disminuye, es natural que se calcule su incremento; del incremento se pasa de inmediato a la definición algebraica de la derivada. Con frecuencia se introduce la noción de derivada de una función, por su significación geométrica, es decir, tratando de calcular el coeficiente angular de la tangente. Los alumnos han aprendido, desde el tercer año, a construir curvas por puntos, cónicas, strofoide, etc.; saben cuanto más precisos son los resultados cuando se han podido trazar algunas tangentes; se trata de aplicar las mismas ideas a las curvas a que nos hemos referido y que son definidas, no por una propiedad geométrica, sino por su ecuación: el proceder resulta particularmente bien con las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{1}{x}$ para las cuales la subtangente tiene una expresión muy simple.

En quinto año sólo se tratan esas curvas, en sexto se aprenden los métodos de cálculo de las derivadas (derivada de una suma, de un producto, etc.). Habiendo introducido la derivada por consideraciones geométricas, se observa que puede ser nula en algunos puntos particulares y que si la función es creciente, la derivada es positiva, si la función es decreciente la derivada es nega-

tiva: la recíproca se demuestra por reducción al absurdo. Estamos ahora en condiciones de formular una regla precisa para estudiar las variaciones de una función; en cierto modo, operamos mecánicamente: una cuestión no ha podido ser considerada como plenamente resuelta sino cuando se ha llevado a procedimientos mecánicos.

Una aplicación que se ha hecho en sexto año (o primera clase) es el estudio de las variaciones de la razón de los dos trinomios de coeficientes numéricos; es curioso comparar lo que da el método de las derivadas con la sucesión de artificios que se empleaban antes de la reforma de 1902.

No deben emplearse coeficientes literales, pues conducirían a poco interesantes discusiones.

La lectura del programa basta como información sobre las otras aplicaciones.

Nada hemos dicho de la continuidad: una función es continua, cuando ella puede ser representada por un trazo o línea continua. Debe considerarse como evidente que la suma, el producto, la razón de dos funciones continuas, la raíz cuadrada de una función continua (en las convenientes condiciones) son funciones continuas, y así es, por consiguiente, de las funciones simples que hemos considerado.

No hay porque dar, en nuestra opinión, la definición abstracta de la continuidad, puesto que no se muestra que una función que satisface a la definición pasa, de un valor a otro, por los valores intermediarios.

Podemos, sin consideraciones geométricas, ser conducidos a la noción de derivada. Basta suponer, por ejemplo, que la variable es el tiempo y la función la abscisa de un punto móvil sobre un eje. Para determinar, en un instante dado, el sentido y la rapidez del movimiento, hay que definir la velocidad en ese instante: es la derivada del espacio. El signo de la velocidad da el sentido del movimiento: volvemos a encontrar la regla para estudiar las variaciones de una función.

La definición de la aceleración conduce en seguida a la noción de derivada segunda, y, por lo tanto, de las derivadas sucesivas.

Funciones primitivas. — Toda función es la derivada de otra que se llama su primitiva, y esta última contiene una constante aditiva arbitraria. Para demostrarlo se emplean también consideraciones geométricas: el área comprendida entre el eje de las abscisas, la curva representativa y dos ordenadas, la una fija, la otra móvil, es una función de la abscisa de esta última, que es una función primitiva de la función representada por la curva.

Puesto que conocemos algunas derivadas, por esto mismo conocemos las primitivas de otras tantas funciones; no se buscan otras. Esto permite calcular algunas áreas y algunos volúmenes limitados por una superficie de revolución y dos planos perpendiculares al eje. La idea nueva es la siguiente: hay funciones que no se saben encontrar directamente, pero de las cuales se pueden determinar las derivadas; las funciones buscadas son las primitivas.

Por ejemplo, el volumen limitado por un ángulo poliedro y un plano secante de dirección invariable, es una función de la distancia al vértice que tiene por derivada el área de la sección: se deduce fácilmente el volumen de la pirámide.

Véanse otras aplicaciones:

Conociendo, en función del tiempo, la velocidad de un punto móvil sobre una recta, encontrar la ley del movimiento.

Encontrar también la ley del movimiento conociendo la aceleración (o la fuerza motriz). En particular, encontrar la fórmula del movimiento uniformemente variado. Este último problema, tan importante, no se resuelve fácilmente por otros métodos.

Cálculo algebraico. — Sobre él nada hemos dicho todavía: todos los ejercicios sobre la adición y la multiplicación de los polinomios no ofrecen ninguna dificultad para los

alumnos. La división de los polinomios en x, ordenados según las potencias descendentes de x sólo se estudia en la clase de « Matemáticas » [1].

La principal aplicación es la búsqueda de la divisibilidad por $x - a$: ella conduce a la forma notable de un polinomio de orden n que tiene n raíces distintas.

Ecuaciones con una incógnita. — Las ecuaciones son las de primero y segundo grado, bicuadrada, recíproca de cuarto grado, y algunas ecuaciones irracionales, que se reducen al primero y segundo grado. Estamos ya informados sobre el número de las raíces de las tres primeras por el estudio de las variaciones de sus primeros miembros; para la cuarta, dividiendo su primer miembro por x^2, se transforma en una función de $x + \frac{1}{x}$, cuyas variaciones son fáciles de encontrar. El mismo cálculo puede hacerse con una ecuación de tercer grado: valores aproximados de las raíces pueden buscarse por el método de las partes proporcionales.

Si, para la ecuación de tercer grado, hay que contentarse de soluciones aproximadas, hay fórmulas para resolver las otras, se las establece fácilmente. Recordemos que no se habla de imaginarias. Hagamos notar, que no conociendo el teorema fundamental del álgebra, y no pudiendo por lo tanto definir correctamente las ecuaciones recíprocas, hay que contentarse con indicar su forma, que muestra bien que si un número es raíz, lo mismo ocurre de su inverso; la expresión $x + \frac{1}{x}$ tiene dos valores, que son dados por una ecuación de segundo grado.

En general, una ecuación con una incógnita no se presenta bajo forma de un polinomio igual a cero; para transformarla hay que aplicar dos o tres reglas simples; cada ecuación es reemplazada por una ecuación equivalente.

Desigualdad con una incógnita — La resolución de estas

(1) Es el 7.º año de la sección *Ciencias - lenguas.*

desigualdades se reduce al problema: buscar el signo de un polinomio. Si las variaciones de ese polinomio son conocidas y sus raíces calculadas, la repuesta es inmediata. Si el polinomio es $f(x) = a x^2 + b x + c$ es cómodo imaginar la curva que representa las variaciones de $a f(x)$, que es una parábola cuyo vértice S es el punto más bajo; este vértice divide la curva en dos ramas que cortan $o x$, cuando $b^2 - 4 a c$ es positivo; sobre esas ramas la derivada $a f(x)$ no tiene el mismo signo. Se sabe, pues, para que valores de x el polinomio $a f(x)$ tiene un signo elegido: se sabe también como un número x está colocado con relación a las raíces.

La misma cuestión puede ser resuelta, sin trazar curva, transformando convenientemente el trinomio: toma las formas

$$a\ (x - \alpha)\ (x - \beta)$$
$$a\ (x - \alpha)^2$$
$$a\ [\ (x - \alpha)^2 + \beta^2\ ]$$

o, según que $b^2 - 4\,ac$ es positivo, nulo, o negativo. La transformación dice, de nuevo, cuando el trinomio tiene raíces y cuales son las fórmulas que las dan; ella permitiría igualmente encontrar el signo de ese trinomio. El problema que acabamos de mencionar: «Dado un trinomio que tenga raíces, encontrar, sin calcular esas raíces, como se encuentra colocado x con relación a ellas», se resuelve determinando el signo del trinomio, y notando que se conoce un número comprendido entre esas raíces, su mediana, cuya expresión es muy simple.

Este último problema acaba de ser estudiado de dos maneras muy diferentes: la segunda puramente algebraica, es la más empleada: la primera nos parece preferible. Desde luego, hay una imagen geométrica que permanece en la memoria y permite *ver* la demostración. En seguida, un alumno que la haya comprendido bien, sabe de inmediato como la generalizará si pasa a los

polinomios de orden superior, en particular al del tercer grado.

En fin, ese problema sirve de preparación al siguiente que se propone en casi todas las discusiones:

Resolver el sistema formado por una ecuación y una o varias inecuaciones de primer grado. Acabamos de escribir la palabra *inecuaciones*, y debe, en esas cuestiones reemplazar a *desigualdades*. Las formas que toma el trinomio de segundo grado son susceptibles de generalización: «Un polinomio en x es (salvo un factor constante) un producto de factores de la forma $(x-a)$ o $(x-a)^2+\beta^2$; es en suma, el teorema fundamental de la teoría de las ecuaciones. Conviene demostrarlo para los polinomios bicuadrados y recíprocos, de los que ya hemos hablado. Todas esas transformaciones pueden ser estudiadas antes de la resolución de las ecuaciones: a ella conducen.

Sistemas de ecuaciones con varias incógnitas. — Se obtiene su resolución, casi siempre, por el método de sustitución: se trata de obtener un sistema equivalente. El caso más importante es el de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Si esas ecuaciones son de primer grado, se las discute completamente.

Si ambas no son de primer grado, ellas deben poder ser completamente resueltas. Lo que da interés a los sistemas de dos incógnitas, es que esas incógnitas pueden ser consideradas como las coordenadas de un punto. El problema propuesto tiene pues una significación y una resolución gráficas; cuando se transforma un sistema, se transforma también el problema gráfico; es siempre interesante seguir las dos operaciones al mismo tiempo.

Entre los sistemas de dos incógnitas, deben distinguirse aquellos en que las incógnitas entran simétricamente. El método más empleado es aquel en que se toman como incógnitas auxiliares las funciones simétricas más simples, la suma y el producto: las incógnitas son entonces las raíces de una misma ecuación de segundo grado fácil de formar. También se podría tomar como incógnitas auxi-

liares la suma y la diferencia; en el fondo, cuando se resuelve una ecuación de segundo grado, se calcula desde luego la diferencia de dos números cuya suma y el producto son conocidos. Del punto de vista gráfico, buenas incógnitas auxiliares son la suma y la suma de los cuadrados.

En fin, el sistema puede tener más de dos incógnitas: diremos solamente que, si las ecuaciones son de primer grado, no se buscan fórmulas generales: la cuestión sólo puede ser tratada convenientemente en la Sección «Matemáticas especiales» [1] gracias a la introducción de los determinantes.

Sistemas de inecuaciones con varias incógnitas. — Aun en el caso de que sólo haya dos incógnitas (es el sólo caso que se considera), el problema rara vez es sencillo; se hace, por lo contrario muy fácil con el auxilio de un gráfico, teniendo cada inecuación una significación geométrica.

Aplicaciones a la geometría. — Más adelante nos ocuparemos del rol del álgebra en geometría: vamos a ocuparnos aquí de un género de problemas, de los cuales se ha abusado mucho, pero que enseña bien cuán poderoso instrumento es el álgebra: «Construir una figura de la cual se dan ciertos elementos, o bien se pide que tenga ciertas propiedades». Si no se percibe una «solución geométrica» hay que tomar por incógnitas otros elementos que con los dados permitan hacer la construcción: tenemos así las ecuaciones del problema. Casi hay que agregar a esas ecuaciones algunas inecuaciones y resolver el sistema de todas ellas, cuando se tiene la seguridad de haber hecho corresponder al problema de geometría un problema equivalente de álgebra.

Todo problema que pueda reducirse a la resolución de ecuaciones de segundo grado es factible con la regla y el compás. Basta indicar la recíproca: el Cálculo sólo

(1) Después de terminados los 7 años de secundaria.

permite averiguar si se puede resolver un problema dado con esos solos instrumentos.

Progresiones aritméticas y geométricas. — Se enseña ya a formarlas en 3.er año; para no hablar de razón negativa, es preciso tratar aparte las progresiones aritméticas crecientes y decrecientes. Se calcula también la suma de los términos.

En 4.o año se da la fórmula de los intereses compuestos, pues sirve para aplicar los logaritmos.

Vuelven a tratarse las progresiones en 5.o año; un nuevo ejercicio es el cálculo de la suma de los cuadrados de las n primeros enteros, que con frecuencia se aplica en el Cálculo del volumen de la pirámide.

Finalmente vuelven a considerarse las progresiones en la clase de *Matemáticas.* (1)

Las representaciones geométricas son simples. En la primera, los términos de las progresiones son las abscisas de los puntos sobre un eje ox; en las progresiones aritméticas, se pasa de un término al otro por una traslación medida por la razón; en las geométricas, por una homotecia de centro o, siendo la razón la relación de homotecia. En una segunda representación, los términos son las ordenadas de los puntos cuyas abscisas son proporcionales a la serie de los números enteros a partir de 0; en las progresiones aritméticas, los puntos están en línea recta; en las geométricas, son los vértices de una línea quebrada convexa, esta línea, que se sabe construir, da una idea de la curva representante de la función exponencial.

Los ejercicios clásicos sobre las progresiones aritméticas son la suma de los cuadrados y de los cubos de los n primeros números enteros; la generalización es inmediata. Sería más sencillo, sin embargo, considerar en lugar de las potencias sucesivas, las funciones que se encuentran en el Cálculo de las diferencias, que permiten

7.° año del bachillerato científico.

encontrar las indicadas sumas. El Cálculo de las diferencias da, además, sumas análogas que son buenos ejemplos de series convergentes.

En una progresión geométrica se calcula la suma de los términos y algunas veces el producto; una progresión decreciente es un nuevo ejemplo de serie convergente. El volumen de la pirámide puede también encontrarse partiendo de las progresiones geométricas decrecientes.

Logaritmos. — Desde luego han sido tratados en 4.º año. Algunas veces, sin dar de ellos una teoría, se señala su propiedad fundamental y sus consecuencias: basta con verificar que los logaritmos tomados en las tablas gozan de esta propiedad. Con frecuencia se hace ver que con progresiones se pueden formar números que tienen las cualidades de los logaritmos. Se emplean tablas de logaritmos y de antilogaritmos de 4 decimales.

Los logaritmos dan un ejemplo muy simple del Cálculo con los números algebraicos; gracias a la introducción de las características negativas cuando los logaritmos son negativos, no se modifica ninguna de las reglas conocidas sobre los números decimales.

Esta cuestión vuelve a considerarse en 5.º año: pueden utilizarse tablas de 5 decimales, aunque las empleadas en el año precedente son suficientes.

Un nuevo estudio de los logaritmos se hace en la clase de *Matemáticas.* Muchos autores parten de progresiones convenientes e interpolan entre dos términos consecutivos un mismo número de términos medios suficientemente grande, pudiendo crecer la progresión geométrica por grados tan pequeños como se quiera: se toma por logaritmo de un número que no se encuentra en la progresión, el del término más aproximado.

Mejor sería que desde el principio se hiciera el estudio de la función exponencial: preparación para ese estudio es la introducción de los exponentes fraccionarios positivos o negativos, para los cuales se demuestra la

permanencia de las fórmulas encontradas en 2.º año, a propósito de las potencias de los números enteros. La función exponencial tiene la ventaja de una representación geométrica y pueden ser construídos tantos puntos como se quiera.

De la función exponencial es fácil pasar a la función logarítmica.

En fin, se ha propuesto definir esta última función como la primitiva de $\frac{1}{x}$ o de $\frac{a}{x}$ en las condiciones que deben precisarse: la proposición fundamental se demuestra fácilmente.

Sin hablar de las aplicaciones al Cálculo de ciertos volúmenes, a la fórmula del péndulo..., se tratan habitualmente las cuestiones de intereses compuestos y de anualidades. Diremos solamente algo de la primera de esas fórmulas. Cuando el tiempo no es un número entero de períodos, toma esa fórmula una forma poco cómoda para el Cálculo. Nadie utiliza esta fórmula y es inútil, por lo tanto, enseñarla: en todos los casos se utiliza la que se establece en el caso particular en que el tiempo es medido por un número entero.

Al ocuparse de la Enseñanza de las Matemáticas se encuentra un extraño prejuicio. Si en un libro de ciencias sólo figuran números representados por cifras, se dice que está al alcance de todo el mundo: todo el mundo conoce la aritmética, y el niño la empieza aprendiendo a contar. Si los números están representados por letras, ya es más difícil, pues ya es el álgebra, y el álgebra sólo se enseña a los alumnos mayores. Ahora, si el libro habla de derivadas, se recuerda que tales cosas solamente son estudiadas por los candidatos a la Escuela Politécnica; si, en fin, se encuentra el signo *suma*, el libro es para los sabios! Ya no podría decirse esto hoy día respecto de tales asuntos, que están al alcance de un bachiller.

Por lo tanto no debe cesar de repetirse: La noción de derivada es sencilla, la de integral definida es más sencilla todavía; están más al alcance de *todo el mundo* que la teoría del mínimo común múltiplo.

Otra idea, demasiado tiempo mantenida en los libros, es ésta: existe entre las diferentes ramas de las matemáticas elementales divisiones estancas. No queremos insistir sobre los famosos razonamientos para la *Aritmética* y para el *Álgebra*; tales puerilidades deben desaparecer de las Enseñanzas secundaria y primaria. Queremos ocuparnos, sobre todo, de la división que se establecía entre la Geometría y el Cálculo: ellas no han dejado completamente de existir.

¿A qué se reduciría la Geometría si se suprimiera toda cuestión de medida, es decir, el Cálculo? Decir que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, no es, pues, enunciar una fórmula? ¿La importancia de la proyección de un lado de un triángulo sobre otro no resulta de que ella es dada por una ecuación de primer grado? La Geometría no puede prescindir del cálculo algebraico; conviene, pues, hacer ese cálculo francamente con las notaciones ordinarias del Álgebra. Tomemos algunos ejemplos: En *Segunda* [1], se estudia cómo varía la razón de las distancias de un punto móvil de una recta a dos puntos fijos de esta recta: ¿por qué no tomar francamente un sentido y un origen? Todo se reduce a la función $1 - \frac{a}{x}$. Tomemos todavía la división de una recta en media y extrema razón. Véase lo que se hace: Queriendo que dos razones sean iguales, se estudian sus variaciones: el hecho se produce dos veces. En seguida, después de ingeniosas transformaciones, se ve que deben construirse dos longitudes, de las cuales se conoce la diferencia y la media geométrica. ¿No es más natural, y más simple, buscar de determinar el punto desconocido

(1) 5.° año.

por su abscisa? Hay dos soluciones porque la ecuación es de 2.º grado y se sabe construir las raíces. ¿Se dirá que el problema ha sido resuelto la primera vez *por la Geometría*, y la segunda vez *por el Álgebra*? Además no debe olvidarse que la cuestión puede ser planteada en un examen; empleando francamente el segundo método, el alumno salvará seguramente la dificultad; ¿que le pasaría con el primero, si no recordara bien los ingeniosos artificios de que hemos hablado? Es en el mismo orden de ideas que, debiendo mostrar que la proyección de un círculo es una elipse, dejando de lado ingeniosas demostraciones llamadas geométricas, se busca la ecuación de esta proyección: la ecuación de la elipse ha sido previamente estudiada. En fin, a propósito de las funciones primitivas, hemos ya hablado del volumen de la pirámide; se pierde tiempo en demostrar toda la serie de los teoremas que a su determinación conducen.

Señalemos ahora una de las causas de la reforma de 1902. Hace 25 años, se reconoció, con razón, que para el ingreso en la enseñanza superior, era necesaria una seria revisión de los principios. Después, la preocupación del extremo rigor descendió a las clases de matemáticas especiales, y se disertó largamente sobre los números irracionales, la continuidad, la integral definida: ¡Sobre todo, nada de representación geométrica, pues hay funciones continuas que no tienen derivadas! y, después, ¿la ciencia del cálculo necesita acaso el andamiaje de la geometría? Que se realice la frase del programa de Matemáticas, *se admitirá la noción de área:* es un eco de aquella época. ¿Qué sentido puede tener esa frase para jóvenes de 16 años?

Como podía preverse, el movimiento ensayó conquistar las matemáticas elementales; se ensayó reducir al mínimo el número de postulados. La consideración de una colección de objetos habiendo dado la noción de número entero, pudo decirse que ya no se utilizaba la observación: una fracción resulta *dos números enteros dis-*

puestos en cierto orden; el álgebra sólo fué una ciencia puramente formal, y, osemos decirlo, casi desprovista de interés. Agreguemos de inmediato que los profesores poco se dejarán persuadir por las nuevas ideas. Para proponer concepciones tan abstractas, es preciso que jamás se haya enseñado a niños.

Las reformas de 1902 señalan una feliz reacción contra tales métodos.

Si la consideración de una colección de objetos basta para definir el número entero, el número fraccionario resulta de una operación sobre una magnitud mensurable. ¿Cómo comprender la adición de los números fraccionarios si ellos no tienen un sentido concreto? ¿No debe darse ese sentido al multiplicando en un producto de dos fracciones? Muchos profesores, para hacer comprender esta multiplicación, toman por unidad el área de un rectángulo: inmediatamente son comprendidos.

Nunca debe dejarse de dar, cuando es posible, una imagen, las más de las veces geométrica, de las operaciones; al producto de dos números corresponde el área de un rectángulo, a la razón de dos números, la pendiente de una recta, etc.; otros ejemplos hemos dado en las páginas precedentes.

Las tendencias que acabamos de señalar indicaban un perfecto desden de la aplicación.

Sin duda no debe hacerse una enseñanza teniendo sólo en vista la ciencia aplicada; en el liceo, las matemáticas deben, desde luego, contribuir a la formación del espíritu; pero, ¿pierden ellas su valor educativo si se muestra *que pueden servir para algo?* ¿Es envilecer la ciencia hablar de las curvas de temperatura o de presión o de las gráficas de los ferrocarriles? ¿Acaso existen más bellos ejemplos de sistemas de ecuaciones de primer grado que aquellos a que conduce la aplicación de las leyes de Kirchhoff a las corrientes continuas? Son las matemáticas aplicadas las que han planteado a los matemáticos las cuestiones más interesantes y, en el modesto cuadro

de las matemáticas elementales, las teorías más atrayentes son justamente las que preparan para las matemáticas aplicadas: ellas tienen necesariamente un sitio en nuestra Enseñanza.

Tomemos, por ejemplo, un tratado cualquiera de Electrotécnica: un alumno que ha cursado las *Matemáticas Especiales* (1) puede leerlo del principio al fin: no sucedía lo mismo hace diez años. Ya no deberían verse libros de Ciencias aplicadas en los que, para evitar el empleo de las derivadas y de las integrales definidas, aun en casos muy simples, se imaginan procedimientos largos y tortuosos que ninguna traza pueden dejar en el espíritu. Olvidan, en tal caso los autores que los métodos naturales se aprenderían en algunas horas: «Es más fácil, se ha dicho, aprender las Matemáticas que aprender a prescindir de ellas».

Trigonometría—La Trigonometría se encuentra en el programa de 6.º año y en el de la clase de *Matemáticas;* (2) es, ante todo, un capítulo del Álgebra: el estudio de las funciones circulares. Esas funciones tienen un rol importante en las Ciencias aplicadas, en particular en el estudio de los fenómenos periódicos.

Si el seno, el coseno, la tangente.. han sido antes imaginados para la resolución de los triángulos, esta resolución sólo constituye actualmente uno de los problemas de la Trigonometría.

Ya en 3.º, 4.º y 5.º años, (3) las líneas trigonométricas son introducidas bajo la forma que más simplemente conduce al problema primitivo; tablas de esas líneas (su importancia irá aumentando) permiten efectuar los cálculos numéricos: solamente más tarde es que se emplearán los logaritmos.

Líneas trigonométricas. — Imitando la definición de la

(1) Son las que se exigen para el ingreso en la Escuela Politécnica y en las de Ingeniería.

(2) 7.º año.

(3) Clases de Cuarta, Tercera y Segunda.

abscisa de un punto tomado sobre un eje, se elige un sentido y un origen sobre un círculo que tiene por radio la unidad de longitud; a partir de este origen se cuentan algebraicamente los arcos en radiantes, en grados sexagesimales o centesimales; en fin, a cada arco corresponde un ángulo al centro medido por el mismo número.

Para el centro del círculo (círculo trigonométrico) se trazan dos ejes de coordenadas rectangulares, el primero que pase por el origen de los arcos, el segundo por la extremidad del arco $\frac{\pi}{2}$: el seno y el coseno de un arco son la ordenada y la abscisa de su extremidad, y su relación se llama la tangente.

El coseno y el seno son, pues, las coordenadas de un punto a la unidad de distancia de la intersección de los ejes: resolver una ecuación en cosenos y senos, equivale, pues, a buscar la intersección de una curva y del círculo trigonométrico.

La tangente es el coeficiente angular de la recta que une el centro del círculo a la extremidad del arco, es la ordenada del punto de esta recta que tiene por abscisa la unidad: de ahí una representación geométrica cómoda de la tangente.

Las variaciones de las tres líneas resultan inmediatamente de su definición.

Las otras tres líneas, la cotangente, la secante y la cosecante (salvo, sin embargo, la primera algunas veces), ya no se emplean. Ellas son, en efecto, las inversas de las precedentes, no figuran en las fórmulas de adición que se aprenden de memoria, y no tienen otro interés que suprimir la expresión de las primeras en forma fraccionaria.

Adición de los arcos.—Las fórmulas de adición se deducen todas de las que dan el coseno de la suma de otras dos. Esta fórmula fundamental se demuestra por el teorema de las proyecciones.

Es frecuente que tenga que aplicarse ese teorema: ahora,

la relación de la proyección de un vector a ese vector es justamente el coseno del ángulo que este último forma con el eje sobre el cual se proyecta, el coseno se introduce de un modo natural cuando se calculan las proyecciones.

Hace 30 años, la fórmula a que nos referimos se obtenía por generalizaciones sucesivas del caso particular en que los ángulos y sus sumas son agudos; puesto que una sola fórmula conviene a todos los casos, la demostración debe hacerse sin ninguna hipótesis sobre los ángulos, y esto lo permite el teorema de las proyecciones.

Conocidas las fórmulas de adición, se sabe transformar la suma de dos cosenos, se sabe también tratar la multiplicación y la división de un arco por dos; se sabría también formar tablas de senos, de cosenos y de tangentes: esta cuestión, con razón, ya no se estudia.

Una aplicación importante introducida por los nuevos programas es el estudio del movimiento armónico de un punto que oscila, sobre una recta, de una parte a otra de un punto fijo. Es cómodo considerar el punto móvil como la proyección de la extremidad de un vector igual a la amplitud, partiendo del punto fijo y girando a su alrededor con movimiento uniforme. Admitiendo la regla de composición de los pequeños movimientos, muchos movimientos armónicos del mismo período, según la misma recta y de una parte a la otra de un mismo punto, dan un movimiento de la misma especie; la amplitud y la fase inicial se encuentran por la construcción de Fresnel.

En fin, las fórmulas de adición conducen al cálculo de las derivadas del seno, del coseno y de la tangente de un arco variable.

Fórmulas logarítmicas. — El interés de las fórmulas calculables por logaritmos es evidente. ¿Cómo se calculará la suma de dos expresiones logarítmicas? Lo más simple es determinar separadamente los valores numéricos de esas expresiones. Se puede también «transformar en suma logarítmica» calculando previamente un ángulo auxiliar;

es también con un ángulo auxiliar que se trata de resolver las ecuaciones de 2.º grado por medio de las Tablas; esas cuestiones no tienen interés, y sería razonable suprimirlas en la enseñanza.

Resolución de los triángulos. — Nos ocuparemos, solamente, de los triángulos en general. Hay que considerar cuatro casos: para cada uno, dos cuestiones deben estudiarse:

1.º Encontrar las condiciones de posibilidad del problema.

2.º Construir fórmulas que los resuelvan por medio de los logaritmos.

Consideraciones geométricas fáciles conducen a la solución de esas cuestiones; sin embargo, vale más, para establecer las fórmulas, partir de dos sistemas de ecuaciones y no acudir a esas consideraciones geométricas más que para hacer la discusión.

Si longitudes y ángulos agudos u obtusos verifican uno de esos sistemas, se muestra que son los elementos de un triángulo, el otro es, por lo tanto, verificado: es en ese sentido que se puede decir que los dos sistemas son equivalentes.

Es un ejercicio interesante, pero absolutamente innecesario, mostrar por qué transformaciones se puede pasar de un sistema a otro; no habría por qué pedir a los alumnos de recordarlo, tanto más cuanto que esas observaciones exigen el empleo de un sistema intermedio del cual jamás tendrán que servirse.

Las aplicaciones habituales son las medidas de la distancia a un punto inaccesible, de la distancia entre dos puntos inaccesibles, de la altura de una montaña, etc. Se trata también el problema de la carta y se calcula los ángulos de un cuadrilátero inscriptible cuyos lados son dados.

IV

INFORME SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

por M. Th. Rousseau, profesor del Liceo de Dijón

Los programas — [1].

Las sanciones — Se sabe que los estudios secundarios comprenden las siguientes sanciones:

Series literarias	Para los alumnos de Primera A 1.ª parte del bachillerato Latin — Griego. Para los alumnos de Primera B 1.ª parte del bachillerato Latin — Lenguas vivas.
Series científicas	Para los alumnos de Primera C 1.ª parte del bachillerato Latin — Ciencias. Para los alumnos de Primera D 1.ª parte del bachillerato Ciencias—Lenguas vivas.
	Para los alumnos de la Clase de Filosofía 2.ª parte del bachillerato de Filosofía. Para los alumnos de la Clase de Matemáticas 2.ª parte del bachillerato de Matemáticas

El bachillerato 1.ª parte, series literarias, no comprende la composición escrita de matemáticas. Se interroga oralmente en matemáticas, atribuyendo a la calificación el coeficiente 1 sobre un total de 14 (A) o 15 (B). Así, a causa de la pequeñez de ese coeficiente, los candidatos tienen generalmente una lamentable deficiencia de preparación matemática. Los hay que hasta ignoran la tabla de multiplicar, y que sin embargo son aprobados; otros son incapaces de aplicar las fórmulas más usuales inferiores, con mucha frecuencia, en ese dominio, a los buenos alumnos egresados de la escuela primaria con su certifi-

(1) Suprimo la transcripción, pues son los de 1905, y más adelante reproduzco los de 1912, vigentes.

cado de estudios. Se ha querido poner remedio a esa deficiencia haciendo eliminatoria la nota 0. Pero, tal medida es, en nuestra opinión, ilusoria. La nota 0 significa que el candidato no sabe absolutamente nada. Si un candidato da correctamente la expresión del área de un triángulo, pero es incapaz de efectuar los cálculos numéricos correspondientes a un caso particular, por ignorancia de la tabla de multiplicar, no merece la nota 0, puesto que algo exacto ha contestado, y todo examinador de conciencia le calificará por lo menos con 0,5; será pues aprobado aunque sólo obtenga una media de 10,5, aunque su ignorancia de las reglas más primarias de la aritmética, lo haga, a nuestro juicio, absolutamente indigno de un diploma de enseñanza secundaria. No es, pues, la nota 0 que debiera ser eliminatoria, sino la 3 y aún la 5.

El bachillerato de filosofía no comprende ninguna composición ni interrogación en matemáticas. [1] Así, la enseñanza de las matemáticas en esta clase, que no es seguida de ninguna sanción, sólo da resultados absolutamente mediocres.

Los exámenes de la 1.ª parte del bachillerato de las series científicas, se hacen sobre el programa de geometría del espacio. En la parte escrita figura una composición de matemáticas y física para lo cual se asignan 4 horas en conjunto y que tiene por coeficiente 4 (2 para matemáticas, 2 para física) sobre un total de 20 puntos. La composición comprende una cuestión del curso a escoger entre tres temas tomados en la misma parte del programa y un problema, siempre muy simple, generalmente con aplicación numérica. En la parte oral figura una interrogación con coeficiente 3.

Los exámenes del bachillerato de matemáticas versan sobre el programa de la clase de matemáticas y comprenden una composición de matemáticas (cuestión del curso a escoger, y un problema) con coeficiente 2, y una

(1) Se entiende en 7.º año.

interrogación con coeficiente 2, sobre un total de 12 puntos.

Métodos de enseñanza. — Todo lo que puede decirse sobre método de enseñanza de las matemáticas en general se aplica a la enseñanza de la geometría en particular.

Que se nos permita, sin embargo, decir, que entre nosotros no se atribuye una gran importancia a la distinción entre el método sintético y el analítico, que tanta tinta ha hecho correr en el extranjero. En Francia, se cree ante todo, que hay profesores que interesan a los alumnos y otros que los fastidian. Un profesor puede explicar una lección muy escuchada y perfectamente comprendida empleando el método didáctico, sin que ningún alumno tenga que pronunciar una palabra durante toda la lección.

Basta que el profesor hable con entusiasmo, con alegría, que dé vida a su exposición, que emplee expresiones pintorescas y conmovedoras, que presente las ideas en un orden tan natural, que una proposición traiga sin esfuerzo la siguiente adivinada por los alumnos aún antes de ser expuesta. Puede, por lo contrario, emplear el método heurístico, o analítico, interrogar constantemente a sus alumnos para tratar de hacerles encontrar, como se ha pedido algunas veces, la demostración de los teoremas y sólo conseguir en su clase, principalmente si ella es mediocre, crear un estado de fatiga, de agitación o de enervamiento, de todo punto perjudicial a la seriedad y a la disciplina.

Enseñar bien, es un arte verdadero, como el de bien decir y el de escribir bien. No conocemos fórmula mágica que contenga el secreto para llegar a ser de un día para el otro un buen profesor. Cada maestro pone en obra las cualidades que le son propias y emplea los métodos que concuerdan con su temperamento y con su carácter.

Y no estaríamos lejos de creer que la variedad en la elección de los métodos, su aplicación juiciosa a los temas tratados, a la edad de los alumnos, a su recepti-

vidad, que depende de una multitud de factores, de su fatiga, de su estado de espíritu, de la hora del día, de la temperatura, etc., es todo el secreto de los buenos profesores. Hay que saber despertar la atención de una clase que se duerme a consecuencia de una exposición demasiado larga o demasiado árida, empleando al efecto el método heurístico; es preciso comprender a qué instante, en una clase puesta en tren y de buen humor por interrogaciones oportunas, por algunas comparaciones emocionantes o entretenidas, el retorno al método didáctico se hace necesario, para volver a la calma y a la disciplina. Todo esto exige un tacto infinito, y, ni los consejos de los hombres más eminentes, por preciosos que sean, ni la lectura de las obras las más sutiles en pedagogía, llegarán a transformar un mal profesor en bueno, del mismo modo que el estudio de las críticas de arte no conseguiría dotar de genio a un pintor sin talento.

Los textos. — Se les puede utilizar de diversas maneras. Desde luego, la que consiste en dar a estudiar en un determinado libro, por ejemplo, de la página 10 a la página 20, y hacer recitar esta lección en el curso de una de las clases siguientes: método condenado desde hace mucho tiempo, que ninguno de nuestros profesores pensaría en aplicar actualmente, pero cuyos resultados pueden, sin embargo, ser satisfactorios con jóvenes alumnos, a condición de poner en sus manos un buen texto y de explicarles con cuidado cada lección antes de señalársela para estudiar.

O bien el profesor expone en clase un curso seguido, mientras que los alumnos escriben, bajo dictado, los enunciados de las proposiciones, y toman sobre las demostraciones notas más o menos completas. En tal caso, el texto no es más que un auxiliar, tanto más útil cuanto el profesor siga mejor su espíritu y ordenación, pero que no es ya indispensable y que, de hecho, muchos alumnos no creen necesario comprar: tal es el método seguido con más frecuencia en nuestros liceos para las clases del 2.º ciclo.

Para terminar señalaremos el método extremo empleado por muchos profesores con los alumnos de las clases superiores. Consiste en hacerles un curso completo, arreglado especialmente para ellos, según las ideas y la experiencia del profesor, sin recomendar ningún texto. La mayoría de los alumnos no buscan entonces en los libros sino temas de ejercicios, mientras que los mejores de ellos leerán complementos sobre asuntos algo más elevados y fuera de los programas.

Los métodos de la enseñanza están estrechamente ligados a la cuestión de los textos. La enseñanza por el libro es, en general, más didáctica, más sintética que una enseñanza oral. Por tanto, se han hecho esfuerzos para introducir el método analítico en la redacción de los tratados de geometría. Citemos en este orden de ideas las *lecciones progresivas de geometría elemental teórica y práctica* de J. Pasteur y el excelente tratado de M. P. Simón cuyo fin principal ha sido prestar servicio al alumno mediano o débil, conduciéndole a trabajar de otro modo que el que ordinariamente emplea, iniciándole más claramente en las ideas y en los métodos generales, « de « modo que él sepa, cuando traza una línea o consi- « dera un triángulo, porque debe hacerlo ». M. Simón se defiende, por otra parte, de haber querido hacer inútil el curso de profesor « que, dice muy justamente, no « podrá jamás ser reemplazado por ningún libro, cual- « quiera que sea ».

De hecho el empleo del texto en la enseñanza secundaria es mucho menos frecuente en Francia que en otros países. Una causa importante es que la administración debe suministrar gratuitamente los libros a los alumnos, que por lo tanto se esfuerzan en que sirvan a numerosas generaciones de los mismos, y que los profesores tienen el mayor trabajo en poner en manos de los alumnos otra cosa que antiguas ediciones o textos caídos en desuso.

Sin embargo, instrucciones recientes invitan a los pro-

fesores a servirse de los textos con la mayor frecuencia posible. Esto nos parece conveniente en muchos casos. Hay capítulos de geometría muy bien tratados en ciertas obras; otros que no ofrecen ninguna dificultad y que todos los autores exponen convenientemente. Los profesores aligeran con provecho su enseñanza y ganarían tiempo indicando a sus alumnos el estudio de esos capítulos.

Pero pocos de nuestros profesores se resignarían a atenerse en todo su curso a un texto determinado; no sin razón, creerían rebajarse en la opinión de los alumnos, y en su propia opinión, abdicando así toda originalidad y toda iniciativa. La autoridad de un profesor sobre sus alumnos, la influencia que ejerce sobre la formación de su espíritu, se hacen sentir sobre todo en las partes de su enseñanza, en la que aporta ideas personales, fruto de sus meditaciones y de sus trabajos, expuestos con convicción, defendidos con ardor. Obligar a los profesores al uso demasiado exclusivo de los libros, es condenarlos a una enseñanza impersonal, sería ocasionar el desaliento en los mejores, cuyo placer es introducir cada año en su curso nuevas simplificaciones, allanar a sus alumnos las dificultades de la ciencia que enseñan, y desarrollar su afición a ella mostrándole su belleza.

El orden o disposición de la geometría elemental. — Si los textos no son, en Francia, la única fuente a que pueden ocurrir los jóvenes que se inician en la geometría, son por lo menos guías preciosas para los profesores que en general, en ellos se inspiran para su enseñanza. Así podemos formarnos una idea exacta del *orden* de la geometría elemental, y del espítitu que rige su enseñanza, analizando los tratados más difundidos.

1.º *Los tradicionalistas.*

Geometría plana. —La gran mayoría de los textos, conformándose a las indicaciones de los programas, dividen la geometría elemental en dos partes, la geometría plana y la geometría del espacio.

La geometría plana se divide en cuatro libros:

Libro I: La línea recta.
Libro II: El círculo.
Libro III: Las líneas proporcionales o la semejanza.
Libro IV: Las áreas.

La geometría del espacio comprende, cuatro, o por lo menos tres libros:

Libro V: El plano.
Libro VI: Los poliedros:
Libro VII: Los cuerpos redondos.
Libro VIII: Las cónicas.

Es con escasa diferencia, la antigua división de Euclides. Se la encuentra en el tratado de Legendre, más tarde en el de Vacquant [1] y en el más moderno de Rouché y Comberousse [2]. Es apenas modificada en el tratado de Hadamard [3], en el cual el libro VII se transforma en: Desplazamiento, Simetría, Semejanza, mientras que los cuerpos redondos son tratados en el libro VIII, que las curvas usuales figuran en el libro IX y que un libro X está consagrado a las nociones de topografía. En el tratado de Combette, edición de 1907, los desplazamientos, simetrías y la teoría de los vectores toman su sitio en el libro VI, el libro VII está consagrado a las superficies de revolución, a los conos y a los cilindros, y el libro IX a las cónicas.

Estos ejemplos bastan para demostrar que, hasta en los últimos años, los autores más estimados y los más en uso han respetado en sus grandes líneas el orden de la geometría de Euclides. Sus pocas modificaciones introducidas sólo se han realizado en la geometría del espacio, que no habrá recibido del gran geómetro griego una for-

(1) París. G. Masson, 5.ª edición, 1876.
(2) París, Gautthier — Villars. 6.ª edición, 1891.
(3) París, Armand Colin, 1898.

ma tan perfecta y tan dogmática como dió a la geometría plana. Esas modificaciones consistieron, sobre todo en adiciones y complementos. Es, desde luego, en el tratado de Rouché y Comberousse, una exposición de las propiedades de la transformación homográfica con aplicaciones a las cónicas, escrita bajo la influencia de la introducción, por otra parte lenta y tímida, de los métodos de la geometría moderna, debidos a Chasles, en el programa de las grandes escuelas; después, más tarde, en el tratado de Hadamard, nociones sobre la teoría general de las transformaciones, especialmente de los desplazamientos y de las inversiones, cuya importancia se reveló tan considerable en la resolución de los problemas de geometría elemental, después de la traducción de la excelente obra de Petersen [1].

Puesto que el orden de Euclides está siempre en uso en la mayor parte de los textos y conserva el favor del mayor número de los profesores, vamos a ensayar de deducir de él los caracteres esenciales.

LIBRO I. — *La línea recta.* — En los antiguos tratados se admitía que la línea recta era el camino más corto de un punto a otro, y se realizaba para demostrar el lema siguiente: Si dos triángulos tienen un ángulo desigual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, los terceros lados son desiguales y al mayor ángulo corresponde al mayor lado. Ese lema servía para demostrar el tercer caso de igualdad de los triángulos. Actualmente se demuestra ese tercer caso de igualdad sirviéndose de las propiedades del triángulo isóceles estudiadas desde ahora en el sitio que corresponde, y que le corresponderá, que es al principio de la geometría. El lema se transforma entonces en un corolario del tercer caso de igualdad de los triángulos y, al mismo tiempo, la propiedad de que

(1) *Métodos y teorías para la resolución de los problemas de construcción geométrica.*

la línea recta es más corta que toda línea quebrada que tenga los mismos extremos, resulta demostrada. [1]

La teoría de las paralelas en los tratados de Rouché y Comberousse, de Guichard, [2] etc. se trata así: se enuncia desde luego el postulado, « por un punto tomado fuera de una recta sólo puede trazarse una paralela ». Se demuestra en seguida la igualdad de los ángulos alternos-internos formados por una secante a dos paralelas, por medio de dos triángulos iguales, después, fácilmente, la recíproca. En los tratados de Hadamard, Girod, etc. [3] se evita la consideración poco elegante de los dos triángulos; se empieza por demostrar, por medio de las propiedades del triángulo isóceles, que, en un triángulo, la suma de los dos ángulos de la base es menor que dos rectas. La proposición relativa a los ángulos correspondientes resulta entonces intuitiva, así como la recíproca.

Recientemente Niewenglowski y Gerard [4] han demostrado muy elegantemente y de la manera más simple, que si los ángulos alternos—internos formados por dos rectas y una secante son iguales, esas dos rectas son paralelas; basta hacer coincidir los ángulos iguales y apoyarse sobre esta propiedad, que los autores dan como la propiedad fundamental de la línea recta, al principio de su obra: Por dos puntos se puede hacer pasar una recta, y no se puede hacer pasar más que una. El postulado de las paralelas, tal como lo había enunciado Euclides. « Si dos rectas cortadas por una secante forman con ella ángulos interiores no suplementarios, aquéllas se encuentran del lado en que la suma de los ángulos interiores es menor que dos rectas », da de inmediato la demostración de la recíproca. Resultan de inmediato adquiridas las proposiciones relativas a las paralelas sin el socorro de la teoría de los triángulos y colocadas completamente al principio de la geometría.

---

(1) Véase por ejemplo Rouché y Comberousse.
(2) París, Vouliert y Nany 5.ª edición, 1018.
(3) París, Alcan, 3.ª edición, 1919.
(4) París, Gauthier--Villars, 1907.

Señalemos en fin que, en los tratados más recientes se han introducido algunas nociones relativas a la simetría, a las traslaciones y al sentido de los ángulos. Lamentamos solamente que sólo se haya hecho con una extrema timidez, como para obedecer a una palabra de orden, y sin sacar de esas nociones fundamentales todo el provecho posible, principalmente para la teoría del paralelogramo, del rombo y de los polígonos regulares, que resultaría mucho más intuitiva.

LIBRO II. -- *El círculo.* — En esta parte los tratados sólo se diferencian en puntos de detalle. Casi todos consideran ahora la tangente como la posición límite de una secante que gira alrededor de un punto fijo. Sin embargo, la mayoría sólo dan esta definición en segundo lugar, definiendo previamente la tangente como una recta que sólo tiene un punto común con el círculo.

Pocos autores definen de una manera precisa el interior y el exterior del círculo y hacen notar qué es una curva convexa. Casi todos consideran como evidente que dos círculos que no tienen ningún punto común son interiores o exteriores el uno al otro. Parten de ahí para establecer las desigualdades características de las cinco posiciones relativas posibles de dos círculos. Hadamard, por lo contrario, define muy claramente el interior de un círculo y, partiendo de este hecho, que la distancia de los centros sólo puede estar comprendida en uno de los intervalos $(O, R - R')$, $(R - R', R + R')$, $(R + R', \infty)$ o igual a uno de los valores límites: demuestra que las proposiciones relativas de dos círculos son cinco, comprendidas las posiciones límites, deduciendo al mismo tiempo las propiedades características.

La medida de los ángulos inscriptos en el círculo conduce a la construcción del segmento capaz de un ángulo dado y del lugar del vértice de un ángulo cuyos lados pasan por dos puntos fijos. Se deduce que el lugar del punto de intersección de dos rectas que pasan por dos puntos dados, formando entre ellas un ángulo dado en

valor absoluto y sentido, es un círculo completo. Esta forma tan útil del enunciado es dada por Hadamard.

El segundo libro termina en todos los tratados por construcciones de triángulos, de tangentes, de círculos tangentes, etc. Además, las últimas ediciones contienen todas algunas nociones sobre los desplazamientos de las figuras planas, sobre las rotaciones, el centro instantáneo de rotación, pero siempre como de mala gana, como si las propiedades de los desplazamientos, que debieran ser colocados al principio de la geometría, — puesto que sin ellos la menor proposición relativa a las longitudes, al triángulo isóceles y a la igualdad de dos triángulos no podría ser demostrada, — sólo fueran simples corolarios.

LIBRO III. — *Figuras semejantes.* — Los recientes tratados de Niewengloswki y Gerord y de Girod empiezan por un párrafo sobre los vectores, su medida, su suma, etcétera, que ellos terminan por la determinación de un punto sobre un eje por medio de la relación de sus abscisas relativas a dos orígenes diferentes.

Es en la teoría de la semejanza que se han introducido las modificaciones más notables. Los antiguos tratados estudiaban desde luego la semejanza de los triángulos, dando de la semejanza una definición que había que modificar para los polígonos sin que ella pudiera todavía servir para los poliedros, las líneas y las superficies curvas. En el tratado de Hadamard la semejanza de dos figuras se define como el producto de un desplazamiento y de una homotecia directa. Sin embargo, el autor ha creído deber dar antes una nueva teoría, de todo punto conforme a la antigua. Niewenglowski y Gerard y Girod realizan un nuevo progreso observando que, el lema que se enuncia generalmente antes de la teoría de los triángulos semejantes, sólo es útil para la homotecia, y que la semejanza de los triángulos viene a ser un simple caso particular de la de los polígonos.

Todos los tratados modernos dan ahora la relación de Stewart cuyas aplicaciones son tan importantes. Todos

también la dan bajo forma simétrica, teniendo en cuenta los signos. En cuanto a la fórmula fundamental que da el cuadrado de un lado de un triángulo en función de los otros dos lados y de la proyección del segundo sobre el tercero, se da, teniendo en cuenta los signos, en los tratados de Combette, Niewengloswki y Gerard, y Girod.

En este último tratado las líneas trigonométricas se definen al principio del tercer libro y se establecen las principales relaciones entre los lados de un triángulo y las líneas trigonométricas de los ángulos.

En las construcciones, Niewenglowski y Gerard indican siempre el coeficiente de simplicidad y el coeficiente de exactitud según la notación de Lemoine. Los polígonos regulares y el cálculo de π son tratados concienzudamente, sin que los autores hayan llegado, al parecer, a hacer un capítulo agradable para los alumnos, ni completamente a su alcance. El cálculo de los lados de las diversas superficies de pentedecágonos está basado sobre la descomposición de la fracción $\frac{n}{15}$ en una suma o una diferencia de fracciones de denominador 3 y 5, pero cuyo origen es dejado en la sombra, lo que le da un carácter completamente artificial. Gerard parece haber encarado la cuestión de la manera más sabia, suprimiendo completamente el cálculo de los lados de los pentedecágonos. Admite todo lo que es necesario saber sobre el límite de los perímetros, de los polígonos inscriptos y circunscriptos para llegar a la definición de la longitud del círculo, suprime todos los cálculos largos y fastidiosos a que conducen los métodos de los perímetros y de los isoperímetros, muestra solamente la posibilidad de calcular π por el método de los perímetros y tiene cuidado de prevenir a los alumnos qué métodos más cómodos, conducen a un valor tan exacto como se quiera y que se les pueda admitir.

La excelente obra de Rouché y Comberousse es el primer libro de geometría clásica en que se han introdu-

cido importantes complementos en el tercer libro con el objeto de vulgarizar los métodos de geometría moderna. Después han seguido el ejemplo todos los autores de tratados completos y han dado los teoremas esenciales de la teoría de las transversales, — sin que ninguno haya observado que el teorema de Menelao no es más que una consecuencia inmediata de las propiedades del producto de dos homotecias, — de la razón inarmónica, de las bases de círculos y de la inversión, de la transformación por polos y polares recíprocas de módulo positivo, — por más que la transformación por módulo negativo sea tan simple de exponer y de un uso no menos frecuente. En fin, la mayor parte definen el polo doble de dos figuras semejantes, sin por eso darles el sitio que merecen y que también pone en evidencia al hermoso libro de Petersen.

LIBRO IV. — *Las áreas.* — Poco hay que decir sobre esta parte de la geometría plana, que todos los autores tratan casi de la misma manera. La única dificultad se encuentra en la definición del área. Para algunos el *área* es la *extensión* de la superficie. Definir así una palabra por otra palabra más vaga todavía, es muy mal ejemplo para los alumnos, pues los acostumbra a satisfacerse con palabras. Por lo menos Girod define el área, como debe serlo toda magnitud, decidiendo en qué se reconoce que dos áreas son iguales; y si su definición carece de rigor, la cuestión es demasiado delicada para que se pueda pensar en reprocharle.

Geometría del espacio. — Los antiguos tratados daban desde el principio la teoría del plano y de una recta perpendicular, después la del paralelismo. En los libros de Rouché y Comberousse, de Hadamard, de Guichard, la teoría del paralelismo se trata al principio y forma un todo independiente. Pero, como la definición del paralelismo por el no-encuentro es puramente negativa, la teoría que de él se desprende resulta difícil de ser comprendida por los alumnos. Así Niewenglowski y Gerard

y Simón, principalmente, han vuelto, por lo menos parcialmente, al antiguo orden de las proposiciones exponiendo la teoría del plano y de la recta perpendicular después de la teoría de las paralelas, lo que permite simplificar y sobre todo hacer más tangibles las demostraciones relativas a las rectas y planos paralelos y a los planos paralelos.

En la teoría de los diedros, Hadamard ha tenido mucho cuidado de mostrar que si dos diedros pueden hacerse coincidir mediante cierto desplazamiento, coincidirían también después según cualquier desplazamiento por el cual se superponga la arista y dos caras, con tal que se coloquen del mismo lado de la cara común. Justifica así la definición de la igualdad, lo que generalmente se descuida en la mayor parte de los tratados.

Señalemos, en fin, que Hadamard, reduciendo siempre la consideración del ángulo de una recta y de un plano a la del ángulo de la recta y de la perpendicular al plano, hace más natural la investigación de la línea de máxima pendiente.

En la teoría de los ángulos poliedros, y especialmente de los ángulos triedros, Hadamard demuestra que la suma de las caras es menor que cuatro rectas, estableciendo, para empezar, que la suma de las caras de un ángulo poliedro envuelto convexo es menor que la suma de las caras de un ángulo poliedro envolvente cualquiera. La demostración de esta proposición se hace como para el teorema análogo de geometría plana; tiene la ventaja de dar un ejemplo interesante de la gran analogía que existe entre la geometría de las figuras planas y la de las figuras formadas por semirrectas que salen de un mismo punto, idéntica a la geometría esférica, y que podría llamarse la *geometría radial;* pero ella exige algunos desarrollos, de utilidad en geometría descriptiva, sobre la convexidad de los ángulos poliedros.

Niewenglowski y Gerard empiezan la teoría de losángulos poliedros por la de los triedros suplementarios, lo

que permite hacer seguir cada teorema de su correlativo. En esta teoría de los ángulos poliedros, todos los autores hablan del triedro formado por las prolongaciones de las aristas antes de haber definido la simetría en el espacio. Así, Simón, ha llamado triedro prolongación del triedro dado para no dar dos definiciones sucesivas del triedro simétrico. Pero esto no evita el inconveniente capital de presentar esta prolongación como un accesorio inventado expresamente para el estudio de los triedros y de dejar en la sombra la idea esencial de la simetría, que es la que aquí interviene en lo que tiene de más general.

Observemos, en fin, que en todos los tratados se demuestra con cuidado que, con tres caras de las cuales una es más pequeña que la suma de las otras dos, puede construirse un triedro, mientras que la proposición análoga para los triángulos se considera en segundo término.

En los tratados de Grevy y de Girod los desplazamientos, rotaciones y traslaciones, habiendo sido colocados después del 5.º libro, pueden utilizarse para el estudio de los poliedros, donde su utilidad se hace sentir, más todavía que para los polígonos.

Las fórmulas que dan el volumen del prisma y de la pirámide son establecidas generalmente partiendo del volumen del paralelepípedo rectángulo fácil de cubicar, sin servirse de la noción de límite, utilizando la sección recta. Sin embargo, Grevy mide el volumen del prisma considerándolo como el límite de una suma de paralelepípedos inscriptos, y el de la pirámide como el límite de una suma de prismas. Este último límite está evaluado sirviéndose de la fórmula que da la suma de los cuadrados de los n primeros números. Simón da numerosos ejemplos y no teme acudir al cálculo. Niewenglowski y Gerard establecen la omnifórmula.

La superficie lateral del cono o del cilindro es considerada como el límite del área lateral de prismas o de pirámides inscriptos. El área de la zona se deduce del área engendrada por la rotación de una línea quebrada

regular, y el volumen del sector esférico como límite del volumen engendrado por la rotación de un sector poligonal, él mismo, a su vez, deducido del volumen engendrado por un triángulo giratorio.

En fin, todos los autores dan complementos más o menos extensos sobre la geometría de la esfera, los triángulos y polígonos esféricos, los poliedros regulares. Todos también, siguiendo el ejemplo de Rouché y Comberousse, consagran amplio espacio a las teorías tan fecundas de la homología, de la homotecia, de la inversión, de los polos y polares. Sólo es de sentirse, como para los desplazamientos, que esas teorías sean expuestas como fuera de lugar, en vez de ser presentadas bastante temprano para permitir llevar a la homotecia la semejanza de los políedros y el teorema sobre las secciones planas de una pirámide o de un prisma por planos paralelos, y a la inversión las bellas propiedades del cono oblícuo de base circular y de la proyección estereográfica. En fin, una última parte se consagra al estudio de las cónicas donde las teorías precedentes encuentran numerosas aplicaciones.

Acabamos de pasar revista, rápidamente, los principales tratados que siguen el orden general de la geometría de Euclides. Hemos visto que poco difieren en la parte puramente elemental. Las nuevas ideas se han ido introduciendo en ellos sucesivamente y como complementos, sea a partir de la obra de Rouché y Comberousse, para los métodos de la geometría moderna (homografía, homotecia, etc.), sea a partir de la de Hadamard y bajo la influencia de Petersen, para la aplicación más amplia de las transformaciones a la resolución de los problemas. En fin, en las últimas ediciones, han sido introducidos desarrollos detallados sobre los desplazamientos y las simetrías, bajo la influencia de una corriente de ideas completamente nueva, de la que vamos a tratar enseguida. Pero, en ninguna parte, los autores que hemos citado han utilizado sistemáticamente esas nociones esenciales para dar una nueva base a la geometría.

La obra de Meray.—Es a Meray a quien debiera corresponder el honor de dar el primer golpe, que fué decisivo, al edificio de Euclides, y de proponer un nuevo fundamento a los elementos de la geometría elemental. La primera edición de su libro apareció en 1874 y fué sobre todo apreciada por los amigos personales y los alumnos del sabio tan eminente como modesto que, en un dominio diferente, fué el precursor de Weierstrass. Los métodos preconizados por Meray fueron al principio experimentados en las escuelas normales, cuyos programas son más flexibles que los de nuestros liceos, porque los profesores, menos preocupados por la preparación de los exámenes, temen menos romper con las tradiciones recibidas.

«En la hora actual—escribía Meray en la advertencia de la 3.ª edición de sus *Nuevos Elementos* [1].—La nueva enseñanza de la geometría se da normalmente en veinte o treinta establecimientos, públicos o libres, diseminados en Francia, de Saint-Lo a Nimes, de Quimper a Nancy; ha hecho los gastos de un centenar de cursos anuales; ha concurrido a la educación científica de unos dos mil alumnos cuyas edades se escalonan de once a diez y ocho y veinte años; empieza a llamar la atención de los países extranjeros. En 1905, las puertas de los establecimientos de instrucción pública de Francia se abrían oficialmente a sus principios esenciales, y, haciéndose apetecible por ese descubrimiento del filón, citando u omitiendo mi nombre, los fabricantes de libros clásicos» conforme con *los últimos programas* lanzaban sin retardo compromisos de circunstancias entre mis ideas y esas tradiciones euclídeas que, la víspera todavía, eran exclusivamente preconizadas y siempre explotadas».

Los *fabricantes de libros clásicos*, como los llama no sin alguna vivacidad Meray, tomaban incontestablemente un falso camino. No se trataba, como ya lo hemos dicho, de

(1) Dijon—P. Jabard. 1906.

una obra fuera de lugar para agregar a los elementos de Euclides, sino de una revolución en los fundamentos de la geometría. Escuchemos, desde luego, al propio Meray en el artículo que publicó en *L'Enseignement Mathematique* (15 Marzo 1904) titulado: *Justificación de los procedimientos y del orden de los Nuevos Elementos de Geometría, por el autor.*

« Los modernos han creado o renovado de arriba abajo las partes superiores o medias de la geometría, pero, algunas modificaciones de forma y de ordenación, de los desarrollos más o menos prolijos dados a cuestiones secundarias, dejan siempre dominar el espíritu de la antigüedad con celo tenaz, el fondo de las partes elementales, soporte lógico del entero edificio, elemento esencial de la más modesta educación intelectual.

« Unica en la historia científica de la humanidad, puesto que verdaderos abismos se han abierto entre el análisis de Diofanto, la mecánica de Arquímedes, la astronomía de Hiparco, la física de Aristóteles..., y lo que esas mismas ciencias han llegado a ser; la anomalía es extraña y sin embargo muy fácil de explicar. La geometría formaba ya una doctrina extensa, cerrada ya con solidez y una cierta armonía, y al lado de ella todo no era más que tinieblas o empirismo, y esta preeminencia exclusiva ha podido conservar tal elevación durante muchos siglos. De ahí una admiración universal para la obra geométrica de los antiguos, quizá el más prodigioso de los esfuerzos del espíritu humano en su incesante persecución de la verdad científica; de ahí el sitio excepcional que los pensadores han hecho a su certeza y a su grandeza, que sus escritos han celebrado hasta convertirlas en lugar común, conservando después sin razón a la obra misma, destinada a la caducidad como toda obra humana, esta admiración que siempre merecerán sus autores, la erección, en un dogma filosófico, de su acabada perfección, de su casi absoluta intangibilidad.

« A pesar de su crédito siempre válido, ese dogma es, en mi opinión, una pura superstición...

« Que los mismos *Elementos* hayan hecho más que su tiempo, no mereciendo ya más que un sitio en el museo de las antigüedades científicas, sitio de muy grande honor en verdad, es lo que resulta con evidencia para los espíritus no prevenidos, *a priori* todavía, de la simple comparación de sus propios aspectos con los de la geometría moderna. Aquí, métodos generales que permanecen en el alma de la cuestión, directos y luminosos por consiguiente, o bien, por momentos, artificios de una habilidad y de una rapidez sorprendente, un simbolismo ingenioso y pintoresco tendiente a identificarlos con los hechos, antes separados por extremas desemejanzas, de los amplios y precisos teoremas, aunque lacónicos, que aportan soluciones fáciles, con frecuencia intuitivas, a mil problemas inabordables para los antiguos, un conjunto claro y coherente en el que cada cosa encuentra inmediatamente su sitio; que una sola mirada puede abarcar sin dificultad, cuyo conjunto produce en el espíritu un encanto sin fin por la facilidad y la elegancia reunidas a la firmeza. Allá (hablo ahora de los *Elementos*) defectos tan graves, tan variados, tan poco notados, sin embargo que un resumen no basta para expresarlos ».

¿Cuáles son, pues, esos métodos generales que Meray va a introducir en la geometría elemental? Son los métodos basados en los desplazamientos. Pero tiene cuidado de advertirnos que tendrá necesidad de todo el espacio, que no se confinará en el plano. Insiste sobre la necesidad de *fusionar* la geometría plana y la geometría del espacio. « Las penetraciones recíprocas de las propiedades de la recta y del plano son tan múltiples — dice en el ya citado artículo, — tan profundas, que la inteligencia de las unas es imperfecta en tanto que no sean igualmente conocidas las otras; y, para mí, a pesar de su data inmemorial, su separación es tan ficticia, tan enojosa, como lo sería la de los monomios y polinomios, cada una de esas dos nociones implicando forzosamente la otra. Por otra parte, las repugnancias clásicas han tenido que capitular,

pues su teoría de las perpendiculares empieza precisamente por desviar los ojos del plan único en que ellas pretenden aprisionarlas. Para la práctica, es todavía más de sentirse, pues durante muy largo tiempo, es necesario impulsar hasta el olvido las nociones especiales que sin embargo nos impone la naturaleza en todo instante para todos nuestros sentidos, y se condena a la juventud a dibujar objetos de los cuales no puede analizar la estructura».

Algo más lejos, el autor nos dice que rol importante va a dar a los *desplazamientos*. «La definición de la recta y del plano se confunden con la enunciación de las propiedades generales que les presta la abstracción, que en seguida el razonamiento puede libremente desarrollar sin contradicciones ulteriores. En esto, he empezado a descartarme de la clásica sequedad: he puesto en primer término la propiedad casi exclusiva de esas figuras, de poder, las unas sobre las otras, aplicarse indefinidamente y *deslizar,* es decir permanecer en aplicación imperturbable durante los desplazamientos ilimitados y extremadamente variables, la *auto-identidad* de cada una en todos sus puntos. Si en eso se reflexiona, si se considera que el fondo de la geometría, en último análisis, consiste en superposiciones realizadas por la aplicación, por la aplicación mutua, se verá, en efecto, que todo ello resulta en su mayor parte de esta identidad existente de mil maneras, de una recta con ella misma, o con cualquier otra, de un plano de la misma manera, de esta casí identidad análoga entre una recta y un plano; por eso se explica al mismo tiempo la preeminencia incomparable de los roles desempeñados en todo por esos dos conceptos en tal penetración recíproca. No temo expresar sobre ellos las primeras consecuencias menos lacónicamente que de costumbre».

En fin, entre los desplazamientos, Meray atribuye una especial importancia a las *traslaciones:* «Hago descansar todas las propiedades generales de las rectas y planos

paralelos sobre las circunstancias fundamentales del movimiento de traslación erigidas en axiomas. Mis definiciones hacen del estado de superposición de dos rectas, o planos, indistintamente, un simple caso particular del paralelelismo, corrigen en consecuencia una falta bastante grave de las vistas clásicas en las que, por ejemplo, una recta y un plano paralelos que no se encuentran son representados como formando una figura absolutamente distinta de lo que ella es en caso de aplicación mutua. Las demostraciones son breves y de una rara uniformidad, por lo tanto muy fáciles de asimilar y de retener. . . Agrego que el movimiento de traslación se observa en casos bastantes vulgares y numerosos para dar a su visión suficiente facilidad, que al revés de los axiomas clásicos (definición de las paralelas por su coexistencia en algún plano, sin que se encuentren, etc.) éstos se prestan inmediatamente a las verificaciones experimentales más simples, que son absolutamente conformes, no siéndolo los otros de ninguna manera, al trazado práctico de las paralelas por la escuadra y la regla. Se ha dicho que la idea de movimiento debe ser desterrada de la geometría. Protesto desde luego contra tal bizantinismo; niego después, recordando que la superposición de las figuras, alma de la geometría, es inseparable, en su esencia, de la concepción de cierto *desplazamiento* para realizarla; contesto, volviendo a la teoría clásica de la perpendicular, en la que algún semiplano es seguramente puesto en *movimiento* alrededor de su charnela.

« Esta teoría de las paralelas se recomienda también por las demostraciones extraordinariamente fáciles que ella suministra: igualdad de los ángulos rectilíneos de los diedros de lados o caras paralelas, etc.

« De otro punto de vista, reflexiono en la importancia verdaderamente capital del movimiento de traslación en Mecánica teórica, en Mecánica aplicada; veo, además, su noción mezclarse íntimamente al siempre demasiado oscuro enigma del reposo y del movimiento *absolutos* en

el Universo. Deduzco para mi teoría una nueva justificación; y otra es la que aparta su buena adaptación a las artes del dibujo ».

Si el libro de Meray ha encontrado resistencias ante profesores de nuestros liceos y de nuestros colegios, si los métodos que preconiza no han sido plenamente introducidos en los programas oficiales, en el rango de su merecimiento, esto se debe, en nuestra opinión, a dos causas principales. Desde luego, a la forma que, en el libro de Meray, es con frecuencia desconcertante, tanto del punto de vista tipográfico como del punto de vista del lenguaje, pintoresco y expresivo en verdad, pero que refleja la originalidad del genio del autor, desorienta a los alumnos de nuestras escuelas, y con frecuencia a sus profesores. Después, a una segunda causa, más profunda que la otra. Meray atribuye poca importancia al número de proposiciones fundamentales que debe admitir al principio de su geometría. Todas las propiedades de la recta y del plano deben ser infinitamente « reaplicables sobre sí mismas », así como las propiedades fundamentales de las traslaciones son admitidas por Meray como resultantes de una experiencia de todos los días, como intuitivas. « Los antiguos sabios, dice en esa misma memoria, que habría que citar por entero, parecen haber sido exaltados por la vista de todo lo que el arte de razonar puede hacer salir de un solo hecho geométrico, aún de los más simples, por la comparación de esos torrentes de ideas encadenadas, con las gotas aisladas que las otras fuentes daban en su tiempo, tan raras, tan pequeñas, tan mal formadas, que han concebido la ilusión que en geometría todo podría salir de la nada, por la sola virtud del silogismo; han acariciado el sueño, lo han alimentado olvidando por él casi todo lo demás, como los alquimistas la piedra filosofal, como los jugadores el quinterno de la lotería. De ahí, esa elección de puntas de agujas aguzadas a ultranza para apilar los teoremas, dando el nombre de *Postulado* a la menos ate-

nuada, como un pesar, como una excusa, de no haber podido todavía suspender todo en el vacío, como una esperanza de poder conseguirlo más tarde. De tal monomanía provienen la demacración de los detalles, sus formas raquíticas, su ensambladura en falso que da por resultado un laberinto inextricable ».

Pero, los profesores no se dejaron convencer. Los axiomas de la Geometría de Euclídes les parecían fáciles de admitir, porque les parecía como la declaración a los alumnos de la impotencia de la geometría de bastarse a sí misma.

Tal era la posición de las partes en presencia cuando elementos nuevos y de la mayor importancia intervinieron en el debate. Las notables teorías de Sophus Lie sobre los grupos de transformación acababan de penetrar en el público por la enseñanza de las Universidades, y entonces apareció claramente que la llamada geometría elemental no es otra cosa que el estudio del grupo de los desplazamientos. Se encontraba así que las proposiciones enunciadas desde 1874 por Meray eran justamente a su respecto, pero por efecto de esa adivinación propia del genio, las proposiciones fundamentales de ese grupo. Los postulados de las traslaciones, adoptados por Meray, en el fondo se reducían a ésto: « *Las traslaciones forman un sub-grupo invariante del grupo de los desplazamientos* ».

Desde entonces las ideas fundamentales de Meray, sobre que los desplazamientos deben ser puestos en la base de la geometría elemental y, como consecuencia, que la geometría plana y la del espacio deben ser fusionadas, se encontraban de acuerdo con las más elevadas y las más fecundas teorías de las matemáticas modernas. Es lo que claramente puso en evidencia Carlo Bourlet en un artículo que escribió en la *Revista de Ciencias.*

El libro de Meray se puso entonces en plena luz. Numerosos artículos se consagraron en las Revistas francesas y extranjeras. Una tercera edición apareció en 1905; pero el autor conservaba en ella absolutamente su ante-

rior punto de vista sin que la menor alusión a la teoría de los grupos pudiera permitir que él mismo comprendió todo el alcance de su obra y el rango que ella tomaba en un conjunto de trabajos cuyo renombre no pareció siquiera haber llegado hasta él.

Pero el impulso se había dado. Todos comprendieron que el porvenir pertenecía a la geometría basada en los desplazamientos. Los programas de 1905 preconizaban claramente su empleo: « Un llamado constante a la noción del movimiento — se dice en ellos explícitamente — parece deber facilitar la enseñanza; es así, que el paralelismo será unido a la noción experimental de traslación, que el estudio de las rectas y planos perpendiculares resultará de la rotación y la idea de igualdad será unida a la de transporte de las figuras, que será precisada introduciendo la noción simple de orientación ».

Las tendencias modernas — Los autores de tratados ya existentes se apresuraron a hacerlos « conforme a los nuevos programas », con la simple agregación al fin de los diversos «libros» de geometría de capítulos consagrados a las traslaciones, etc. Pero aparecieron también algunos nuevos textos, en los cuales se abandonaba completamente el orden de Euclides. Citaremos, desde luego, el de E. Borel (1). « La idea de que la enseñanza de la geometría debe ser renovada, gana terreno cada día, dice en su prefacio. Sin embargo, choca todavía con serias resistencias, de parte de excelentes espíritus que temen la desaparición del edificio lógico construído sobre los *Elementos de Euclides.* ¿No vale más, dicen, continuar haciendo en este edificio modificaciones, reparaciones, en lugar de demoler para reconstruir de nuevo? No es esta mi opinión, y estoy firmemente convencido de que, dentro de algunas decenas de años, lo más tarde, la enseñanza de la geometría tendrá una base más moderna. Se encontrará esta base en los trabajos de los grandes

(1) Paris — A. Colin, 1905.

geómetras y analistas del siglo XIX, que nos han enseñado que: *la geometría es el estudio del grupo de los movimientos.* Sustituir cada vez más el estudio dinámico de los fenómenos a su estudio estático es, por lo demás, una tendencia esencial del espíritu moderno; es la idea de evolución que domina cada vez más el pensamiento contemporáneo.

No pretendo ofrecer aquí un completo edificio geométrico, basado sobre esos nuevos principios; me parece esta tarea demasiado pesada para un solo hombre, y tengo la convicción de que solamente después que un método ha experimentado durante largos años la prueba de la práctica, es que se puede codificar, por decirlo así, el resumen de la experiencia de los numerosos profesores que lo han aplicado...

Creo que es bueno conservar este edificio (euclídeo) hasta el día en que pueda ser reemplazado por otro edificio no menos perfecto, pero que armonice más con la actual ciencia moderna. Sin embargo, si me parece útil conservar el edificio euclídeo, me parece indispensable que su estudio se reserve a los jóvenes de espíritu suficientemente maduro y bastante familiarizados con la geometría para que no se desalienten por su aridez. Que entonces se ponga en sus manos la geometría de Hadamard, por ejemplo; se encontrarán en condiciones de apreciar toda su belleza. Pero, aquellos que encontraran esa obra demasiado completa o demasiado difícil, — y será el caso de casi todos los principiantes, pues no es para ellos que la escribió Hadamard — no pienso que deban ofrecerse reducciones de tal libro; esas reducciones serían tan abstractas y por lo tanto al principio no menos difíciles, dejando de conservar la profundidad que legitima ese empleo de la abstracción.

Es por eso que he tratado de escribir una geometría más concreta, en la que las consideraciones de simetría, de desplazamientos, son invocadas con la mayor frecuencia posible. Las demostraciones que así resultan

son más simples y me parecen más claras que las demostraciones euclídeas ».

Como se observará por este prefacio, Borel no considera como Meray, el pequeño número de postulados y la perfección *lógica* del edificio de Euclides como de escasa importancia. No oculta que su tratado no le satisface completamente, que debe ser considerado como una obra de transición que permita beneficiar desde ahora a nuestros escolares de las ventajas de los métodos modernos, del punto de vista de la claridad, de la simplicidad y del atractivo que ellos presentan. Pero, manifiesta su confianza de que, en un próximo porvenir, una teoría tan perfecta como la de Euclides, podrá ser elaborada sobre las nuevas bases con un restringido número de postulados. Si Borel tiene esa convicción, no compartida con Meray, es sin duda porque en este orden de ideas, importantes trabajos han sido realizados recientemente; son los de Peano, de Russell, que han precisado de una manera notable la noción de postulados *fundamentales* e *independientes*, y sobre todo las tentativas tan frecuentemente coronadas de éxito de Hilbert, de mostrar qué parte del edificio de Euclides está sostenida por cada uno de los postulados esenciales, lo que se derrumba y lo que permanece de ese edificio después de la supresión de uno de aquellos.

El libro de Borel está dividido en tres partes: I. *La recta* y *el círculo;* II. *El plano* y *los cuerpos redondos;* III. *Semejanza*, *áreas* y *volúmenes.*

La primera parte contiene, poco más o menos, lo que generalmente se acostumbra designar por 1.º y 2.º libro. Las únicas propiedades, que al principio son señaladas con respecto al plano, son: 1.º contener toda recta de la cual contenga dos puntos, y, que según costumbre, es tomada como definición del plano; 2.º ser aplicable sobre sí mismo, volviéndolo en sentido inverso, la que es considerada como fundamental. Esta vuelta en sentido inverso, conduce al autor a tratar en seguida del sentido

de una figura plana y de la simetría con relación a un eje, que utiliza para establecer la existencia de la perpendicular a una recta trazada por un punto exterior, y las propiedades del triángulo isóceles y del rombo. Los diversos teoremas relativos a las líneas envolventes y envueltas son establecidos admitiendo que la línea recta es la más corta distancia de un punto a otro.

Después de algunas propiedades fundamentales del círculo, y de algunas construcciones en las que juiciosamente se utiliza la simetría con respecto a una recta, el movimiento de traslación es definido por el deslizamiento de una escuadra sobre un plano a lo largo de una regla. Admite: 1.º que en un movimiento de traslación, todos los puntos de la figura se desplazan de longitudes iguales; 2.º que si dos rectas son paralelas, es decir que pueden ser conducidas a coincidir por una traslación, ellas también pueden ser conducidas a coincidir por una traslación paralela a una dirección cualquiera (diferente de su dirección común). La propiedad de dos paralelas de estar constantemente a la misma distancia paralelamente a una dirección cualquiera resulta inmediatamente de la 1.ª propiedad, y es considerada como la propiedad fundamental de las paralelas.

Viene en seguida la definición de los ángulos y del movimiento de un plano sobre sí mismo, con algunas observaciones sobre las analogías y diferencias entre la rotación y la traslación.

Un parágrafo sobre la medida de las longitudes, de los ángulos y de los arcos, encuentra en seguida su sitio natural. La simetría con relación a un punto es utilizada para establecer la igualdad de los ángulos correspondientes, alternos, internos, etc., formados por dos paralelas y una secante. Los casos de igualdad de los triángulos son dados según el método preconizado por Meray, como una consecuencia de este hecho: que su construcción, partiendo de un lado y dos ángulos adyacentes, o de dos lados y el ángulo comprendido, o de los tres lados, no

da, a menos de un desplazamiento, y cuando éste sea posible, más que una solución.

Después de los teoremas clásicos sobre la medida de un ángulo inscripto en un círculo, el teorema del segmento capaz es seguido, como en el tratado de Hadamard, del teorema más general de la circunferencia capaz, en que interviene el sentido del ángulo.

Terminan esta primera parte construcciones diversas, un parágrafo sobre las propiedades de los polígonos regulares que por la simetría resultan intuitivas, y un resumen de las principales proposiciones relativas al triángulo terminan esta primera parte.

La segunda parte, empieza recordando las definiciones de la recta y del plano y sus posiciones relativas. Después, estando definido el movimiento de traslación por las deslizaderas de Meray para el espacio, el autor muestra, admitiendo algunas proposiciones que necesita, que la definición de las rectas o planos paralelos por una traslación equivale a la definición ordinaria del no encuentro. Los teoremas fundamentales sobre las rectas y planos paralelos resultan así intuitivos, como lo había demostrado Meray.

La rotación alrededor de un eje se define en seguida. El autor admite la proposición fundamental siguiente: En el movimiento de rotación alrededor de un eje, toda perpendicular al eje en un instante dado, permanece perpendicular al eje durante toda la rotación, y sus posiciones sucesivas están en un mismo plano que, por definición, es perpendicular al eje. Es lo que admite Meray en su tratado bajo una forma algo diferente. Viene en seguida la teoría de los ángulos diedros, de los planos perpendiculares, y después, las propiedades elementales de las superficies de revolución, especialmente de la esfera, de los conos y de los cilindros.

Después de volver a la simetría, obligado a definirla nuevamente para el espacio, Borel desarrolla la teoría de los triedros sirviéndose del triedro prolongación como

triedro simétrico de un triedro dado, en lugar de emplear la simetría con relación a una de las caras, que, sin embargo, complica mucho menos las figuras. Indica la construcción de un triedro en los cuatro casos clásicos y deduce a la vez los casos de igualdad y la relación entre las caras, de acuerdo en ésto con Meray.

En fin, las propiedades fundamentales de los poliedros y especialmente de los poliedros regulares, en los que las nociones de simetría, de rotación y de traslación desempeñan un rol capital, terminan esta parte.

La tercera parte comienza por el teorema de Thales, del que el autor saca las definiciones de las líneas trigonométricas para inmediatamente aplicarlas a la investigación de las relaciones métricas en los triángulos. Después, con el fin de preparar a los alumnos en la noción de las figuras semejantes, da la definición de la semejanza especial de los triángulos y de los polígonos.

Después de los teoremas clásicos sobre las secantes al círculo, los segmentos interceptados por las bisectrices de un triángulo sobre los lados, el autor generaliza el teorema de Thales para el espacio, define en seguida la homotecia desde luego en el plano, después en el espacio, pero de ella sólo da una propiedad fundamental, sin mostrar el estrecho lazo que existe entre esta transformación y la semejanza.

Esta tercera parte termina por el establecimiento de las fórmulas relativas a las áreas y a los volúmenes y a la longitud de la circunferencia. No son indicadas las dificultades que se encuentran en la definición del área y del volumen. Sin embargo, la evaluación de la razón de las áreas de dos superficies semejantes es presentada de modo que haga entrever a los alumnos la naturaleza de los razonamientos empleados en las cuestiones de ese género. No se da ningún detalle sobre el método de los perímetros y de los isoperímetros. Se muestra simplemente que es posible el cálculo de π por el método de los perímetros.

En fin, en algunos *Complementos*, el lector encuentra algunas nociones elementales sobre la elipse, la parábola, la cisoide, la conchoide de Nicomedes, así como las sombras y la agrimensura.

Poco después de Borel, Carlo Bourlet publicaba un *Curso abreviado de Geometría.* [1] «Hemos ensayado, — decía en el prefacio del 1.er volumen (Geometría plana) — que esté lo más conforme posible con los nuevos programas de 27 de Julio y con las *Instrucciones* a ellas anexas.

« Esos programas y esas instrucciones han introducido en la enseñanza de la geometría elemental dos reformas que modifican completamente su carácter: una reforma de método y una reforma de enseñanza.

« La *reforma de método* consiste en el abandono de la geometría clásica de Euclides para sustituirle una geometría más moderna, en la que los *desplazamientos* desempeñan un rol preponderante. Este nuevo método consiste esencialmente en unir la noción de paralelismo a la de traslación. Presenta la doble ventaja de ser mucho más intuitiva, y, por consiguiente, más fácilmente accesible a los jóvenes cerebros, y de disponer los hechos geométricos en un orden de complicación gráfica creciente.

« La *reforma de enseñanza* invita a los profesores a acudir con frecuencia a la experiencia, en el primer ciclo, y a realizar una estrecha unión entre la geometría y sus aplicaciones al dibujo gráfico.

« El paralelismo de las dos enseñanzas de la Geometría y del Dibujo era casi irrealizable con el método de Euclides, en el cual era generalmente imposible hacer seguir, inmediatamente, las proposiciones de las construcciones correspondientes. Por lo contrario, es completamente natural con el nuevo método en el cual los elementos geométricos son, en cierto modo, definidos por las construcciones mediante las cuales se obtienen. »

---

(1) París, Hachette y C.ª, 1906.

Del punto de vista del *método* el tratado de Bourlet forma parte de esa serie de trabajos que había anunciado Borel, y que deben contribuir a la edificación del sistema que reemplazará al de Euclides.

Hemos visto que Borel no había adoptado en su tratado la fusión preconizada por Meray. Las dos primeras partes, constituían, por decirlo así, la geometría cualitativa, y la tercera parte la geometría cuantitativa o métrica. Pero siempre Borel empieza por ocuparse de lo que es relativo al plano, estimando, sin duda, que el examen de las figuras planas está más al alcance de los alumnos que el de las figuras espaciales, y que el estudio del plano los prepara útilmente al estudio del espacio.

Bourlet separa más claramente todavía la Geometría plana de la Geometría del espacio, y las trata en dos volúmenes separados. Divide la geometría plana en seis capítulos. El primero comprende las definiciones fundamentales sobre la línea recta, los segmentos, los ángulos, los polígonos y los primeros principios del dibujo. Entre las propiedades de la línea recta, Bourlet enuncia la de ser definida sin ambigüedad por dos puntos, pero agrega la de poder deslizar y girar sobre ella misma, a las cuales atribuye Meray la importancia de que ya se ha hecho mención, y que Borel pasa en silencio. El segundo capítulo contiene el estudio sumario de los desplazamientos elementales y de sus consecuencias. Las paralelas son tratadas con el auxilio de las traslaciones, y la rotación conduce naturalmente al estudio del círculo. El tercer capítulo está consagrado a las figuras elementales. Empieza por las propiedades fundamentales de la simetría, que serán utilizadas en el estudio del triángulo isóceles y del círculo, de los triángulos y de los polígonos. Cada caso de igualdad del triángulo está acompañado de la construcción del triángulo con los elementos que en él intervienen, pero aquí esta construcción sigue la demostración habitual de los casos de igualdad, que la existencia de una única solución hace, sin embargo,

intuitiva. El capítulo IV está consagrado a las líneas proporcionales. El teorema de Thales se demuestra simplemente por la consideración de las traslaciones. La semejanza es considerada como el producto de una homotecia directa y de un desplazamiento, las líneas trigonométricas definidas y empleadas inmediatamente para el establecimiento de las relaciones métricas de los triángulos. El cálculo de π está estrictamente reducido a su mínimo. El capítulo V contiene la evaluación de las áreas simples, según los métodos ordinarios, y el capítulo VI nociones elementales sobre la elipse, la parábola, la hipérbola, las conchoides, las espirales, etc.

La geometría del espacio (1) se compone de cuatro capítulos.

En el primero encontramos, como en el correspondiente capítulo de la geometría plana, el estudio de las principales propiedades de los desplazamientos elementales, traslaciones y rotaciones, y respectivamente su aplicación al paralelismo de las rectas y planos, tratado con notable sencillez y cuidado; después el estudio de los diedros y de las rectas y planos perpendiculares. La propiedad fundamental, admitida por Borel: En una rotación alrededor de una recta, toda recta perpendicular a la charnela describe un plano, es aquí muy elegantemente demostrada, lo cual constituye un positivo progreso. El capítulo II comprende la teoría de las proyecciones ortogonales y nociones de geometría cotada. En el capítulo III encontramos el estudio sumario de los prismas, pirámides y, en el capítulo IV, la de los cuerpos redondos. Un apéndice está consagrado a la agrimensura, levantamiento de planos y nivelación.

Bourlet en ese tratado, ha aportado, pues, una importante contribución a la edificación de una geometría elemental basada en el grupo de los desplazamientos, por la demostración que ha dado de la proposición funda-

(1) **París. Hachette y Cía.; 1907.**

mental que conduce a la definición de una recta y de un plano perpendiculares, y por el cuidado completamente particular que ha puesto en la redacción del capítulo relativo al paralelismo. Por lo demás, ha publicado después, en los *Nuevos Anales de Matemáticas*, 1907, una *Teoría de las paralelas basada en la traslación rectilínea*, más completa todavía y casi enfocada. Sólo queda por demostrar de una manera más clara que toda traslación que deja un punto fijo es la traslación idéntica y que el producto de dos traslaciones es una traslación.

En fin, por primera vez, en el tratado de Bourlet, se aclara la idea de que la división de la geometría en capítulos debe hacerse no según las figuras que en ella se encuentran, sino según los *métodos* que se emplean. El proceso que consiste en estudiar el triángulo, después el círculo, después el plano, etc., como entidades independientes, se parece al muy conocido por nuestros padres y que, en geografía, consistía en estudiar Francia departamento por departamento. Estudio vano y de ningún valor para la cultura del niño porque sólo utiliza la memoria, que no le enseña la razón de los fenómenos, que no los une entre sí, y de ellos no deduce leyes ; estudio estéril porque no le da, con vistas de conjunto y métodos generales poderosos, el deseo y el medio de encontrar por sí mismo, lo que no se ha tenido el tiempo de enseñarle.

Es, pues, la exposición de esos métodos generales, transformaciones, desplazamientos, rotaciones, traslaciones, homotecia, semejanza, etc., lo que debe constituir un curso de geometría. Después el estudio de una figura dada ya no exigirá ningún esfuerzo y ya no lo encararán los alumnos sino como una aplicación entre mil de cada una de las transformaciones estudiadas. Es evidentemente inspirándose en esos principios que Bourlet ha titulado los primeros capítulos de sus dos volúmenes: *Los desplazamientos elementales* en lugar de: *La recta y el plano.*

Señalamos todavía la excelente obra de Fort y Dreyfus [1] cuyo fin es sobre todo poner al alcance de los principiantes los elementos de la geometría. En este tratado que vale sobre todo por su claridad, exposición y sencillez, los autores han introducido la mayor parte de las mejoras de que hemos hablado a propósito de los libros de Borel y Bourlet.

Conclusión. — Tales son, por lo que conocemos, los principales esfuerzos que han sido hechos en Francia en estos últimos años para renovar las bases de la Geometría elemental.

El acuerdo parece deber hacerse entre todos los profesores de nuestra enseñanza secundaria sobre ese punto, que las propiedades de los desplazamientos deben ser tomadas como fundamento de la Geometría, pero no todos están todavía persuadidos con Meray que esta reforma, tan profunda, deba llevar con ella, la fusión de la Geometría plana y de la Geometría del espacio. Es, creemos, porque la primera es considerada como más accesible a los principiantes, sin duda porque fácilmente puede mostrárseles figuras planas, y aun hacérselas dibujar en una hoja de papel o en un pizarrón. Para iniciar a los alumnos en la segunda sería necesario poder mostrarles figuras espaciales y hacérselas construir. Por lo demás, lo que las instrucciones de 1905 habrían previsto en cierta medida señalando el interés que habría « en poner un objeto de forma simple en las manos del alumno, y pedirle que sobre ese objeto efectúe todas las medidas que juzgara necesarias para poder reproducirlo en seguida por medio de un dibujo, evaluar la superficie, el volumen, etc., los resultados obtenidos comprendiendo verificaciones experimentales », y recomendando a los profesores que para los ejercicios prácticos utilicen una colección de modelos y aparatos simples. « Nada impediría — agregan las mismas instrucciones — hacer construir el cuerpo re-

(1) Paris, Henry Poulin, 1907.

presentado por un dibujo, de calcular los elementos, medirlos después por medio del dibujo o sobre el mismo cuerpo ».

Es esa, en nuestra opinión, una cuestión de la mayor importancia.

El alumno no debe razonar sobre figuras del espacio sino tiene en reserva en su memoria una colección de imágenes, que evocará cuando quiera, que le permitirán, como se dice, ver en el espacio, y que, en cierto modo, servirán de sostén a su razonamiento. Ahora, de ningún modo puede llegar a adquirir esta reserva de imágenes, por la contemplación de modelos inertes. El alumno que desde su sitio ve un objeto inmóvil dentro de una vitrina o sobre la mesa del profesor sólo almacena una imagen en su memoria. Como muy bien lo ha explicado Poincaré, no llegamos a *situar* un objeto en el espacio y a comprender su configuración sino gracias al *grupo* de las imágenes que se forman en nuestra retina, cuando examinamos ese objeto, desplazándolo de un modo continuo con relación a nosotros, o cambiando de sitio nosotros con relación a él. Con mayor razón, un dibujo, forzosamente muy imperfecto, es impotente para darnos una idea clara de un objeto que jamás hemos visto, e impotente también un dibujo de descriptiva, a pesar de las dos representaciones que nos ofrece. Cuando más con el auxilio del cinematógrafo se llegaría a adquirir la noción visual del objeto considerado; pero todavía quedaría por adquirir las nociones tactiles que con él se relacionan y que tienen su importancia. Así, es mejor en todo concepto, poner los objetos mismos en las manos de los alumnos, para que los vuelvan en todos sentidos, que los analicen en todos sus detalles de forma y de estructura. Es así que se despertará en ellos el sentido de la situación y de la orientación y que se contribuirá a hacer de ellos obreros de acción segura y precisa, o experimentadores hábiles.

No me parece dudoso que las primeras nociones geo-

métricas que deben darse a los niños no sean nociones espaciales. Las figuras planas ya son abstracciones, nosotros vivimos en el espacio y no en un plano. Todos los niños, casi antes de hablar, saben lo que es una bola, un paralelepípedo rectángulo, un cilindro, un cono, porque tales figuras tienen muchos objetos familiares. Y si no las han construído ellos mismos, por lo menos han roto alguna caja de cartón, cúbica o cilíndrica, o alguna pelota de goma, con frecuencia con el deseo que tienen de conocer el contenido y de analizar su estructura. Pero a esa edad ¿cuántos saben qué es un triángulo, un cuadrilátero?

Aun iremos más lejos. Un cubo, un cilindro, una esfera están caracterizados por propiedades cuantitativas. Ahora, las primeras nociones geométricas son puramente cualitativas. Un candidato a la primera parte del bachillerato latín lenguas vivas (que haya sido aprobado) interrogado sobre el cubo en uno de los últimos exámenes, respondió que es un cuerpo redondo. Entendía por tal, evidentemente, que es un cuerpo que tiene la misma conexión que la esfera, y que, teniendo ejes de simetría, ofrece el mismo aspecto desde diversos puntos del espacio. Era eso Geometría cualitativa, la única que habría penetrado en su cerebro. Estimamos, pues, que las primeras nociones geométricas que deben darse a los niños debieran ser nociones muy simples de *analisis situs*, del punto de vista experimental, bien entendido. Se les mostraría lo que es un cuerpo en el espacio, una superficie, una línea. Se les enseñaría lo que es una línea recta y la gausa, lo alto y lo bajo, el derecho y el revés. Se les mostraría lo que es una cortadura en un cuerpo, una superficie, una línea y, sobre ejemplos concretos, se les haría tocar con el dedo la diferencia que existe, del punto de vista de las cortaduras, entre los cuerpos que poseen uno, dos y muchos agujeros, como el toro, y los que no poseen ninguno, como la esfera. Parece que nada impediría, llamar la atención, por experiencias sencillas,

sobre los problemas tan curiosos del género del de los puentes y de las islas, del número de lados de una superficie, de la carta o de los cuatro colores, etc. Lo que sería mucho más interesante que los dos o tres resultados que retendrían, es que para asimilarlos, deberían tomar en sus manos los más diversos objetos, volverlos en todos sentidos, cortarlos, disecarlos, aplicarlos los unos sobre los otros y adquirir así, por la primera vez, la convicción de que en tales operaciones hay hechos interesantes, dignos de atención y estudio.

Sería necesario, después, antes de toda consideración cuantitativa, obligarlos a darse cuenta de lo que es un movimiento. El movimiento de una puerta que se cierra o se abre, el movimiento del cajón de un mueble, llamarían su atención sobre los dos desplazamientos elemenmentales: la rotación y la traslación. Podrían aprovecharse para que hicieran los primeros trabajos manuales. Se les haría comprobar que un cuerpo cualquiera, un bloque de madera, por ejemplo, fijado a la mesa por medio de un hilo muy corto que una dos anillos, puede todavía moverse de una infinidad de maneras; que todavía puede hacérsele mover, pero de modo más restringido, cuando se fija un segundo punto de la misma manera; que hay entonces una infinidad ligados al cuerpo que no se mueven en todos esos desplazamientos; que si se fija un tercero, tomado entre los que todavía pueden moverse, el cuerpo queda completamente inmovilizado.

Es ese, notémoslo bien, el método natural, es el que se impone por sí mismo al hombre que observa, fuera de toda enseñanza. Veamos un campesino, un obrero, que apenas sepa leer. No sabría quizá medir un ángulo, ni evaluar el área de su campo, pero sabría que, para colocar una puerta en la barrera o cerco de ese campo, bastaría asegurarla en dos puntos; que para hacer deslizar el cajón de un mueble es preciso guiarlo por dos deslizaderas rectilíneas, etc.

Los alumnos se encontrarían así perfectamente prepa-

rados para el estudio de la geometría del espacio en lo que ella tiene de cuantitativo, puesto que la comprobación de la igualdad de dos elementos de una figura y su adición están siempre ligadas a algún desplazamiento espacial. De una manera completamente natural seríamos conducidos a hablarles de esta superficie, que es el plano, cuyas propiedades, como la misma definición, son aplicaciones inmediatas de las rotaciones. Después del estudio de las figuras planas y de las traslaciones, se daría a los alumnos nociones de geometría descriptiva y se les podría pedir que representaran los cuerpos que desde el principio se han puesto en sus manos, y que hubieran estudiado hasta entonces. Cuando estuvieran más preparados en geometría descriptiva, se les haría construir, según las proyecciones, al principio objetos simples, triedros, poliedros, que podrían después servir para las lecciones sobre objetos y trabajos prácticos de los alumnos de las clases inferiores, en seguida cuerpos más complicados, grupos de poliedros que se interceptan, y también cuerpos redondos, de una estructura demasiado compleja para ser construídos directamente, y hacer palpar los inmensos servicios que presta la geometría descriptiva al arte del ingeniero y del arquitecto.

Pero estamos convencidos de que, empezar la enseñanza de la geometría por las figuras planas, pidiendo que el niño reproduzca y estudie figuras planas que son abstracciones, y querer en seguida darle conocimiento con el auxilio de proyecciones de figuras en el espacio, sea por los procedimientos de la geometría Monge, sea por los de geometría cotada, sería condenarlo a un trabajo repelente y fastidioso; y, en lo que concierne a la geometría del espacio, es un método vano, tanto como el que consistiría en pedirle que pintara un paisaje que jamás hubiera visto, o también querer darle de ese paisaje una idea justa haciéndole leer descripciones.

En resumen, la cuestión de la fusión y la de la edificación de la geometría sobre el grupo de los desplaza-

mientos, es la cuestión mucho más general de la enseñanza *libresca* y de la enseñanza *según la naturaleza.* La Geometría plana es el *libro* que los profesores han empleado hasta ahora para enseñar la Geometría natural. ¡Pero qué seguridad no les ofrece! Una clase de alumnos que aprende en su libro el tercer caso de igualdad de los triángulos, con la pluma en la mano, es el silencio, es la inmovilidad; es también el fastidio, pero es la tranquilidad del profesor o del vigilante. Una clase de alumnos que construye objetos de madera o de cartón, es la vida, pero es también el ruído y el movimiento y con ellos todas las consiguientes dificultades de la vigilancia. Con mayor razón no puede tratarse de practicar agrimensura, sin embargo claramente prescripta en las instrucciones de 1905, puesto que se necesitarían algunos instrumentos costosos, que los ejercicios sólo podrían hacerse al aire libre, y que los alumnos jugarían durante el tiempo de esta libertad relativa, de la cual estarían tanto más tentados a abusar cuanto que generalmente no están sometidos a un regimen de reclusión y de cuartel.

Estamos persuadidos que el porvenir de la Enseñanza de la Geometría en nuestro país depende en estrecho modo de la introducción de las manipulaciones matemáticas en los programas de enseñanza secundaria. Esas manipulaciones sólo exigen la compra de algunos instrumentos rudimentarios, un poco de papel, de cartón, cola, algunos pedazos de madera: costaría infinitamente menos para organizarlos que las manipulaciones de física, que han sido reconocidas necesarias, y de las cuales aquéllas debieran ser el prefacio. Pero sería preciso que instrucciones formales fuesen dadas al respecto, que fueran conservados los objetos construídos por los alumnos, como, por lo demás, sus dibujos, y empleados para adornar la clase; que los inspectores se hicieran presentar los objetos construídos; en fin, sería necesario introducir en los exámenes del bachillerato una prueba de Geometría descriptiva, y exigir la presentación de las

figuras y de los dibujos construídos durante el año, como actualmente se hace para el concurso de algunas de las grandes escuelas.

Si abandonamos la división de la Geometría en Geometría plana y en Geometría del espacio, ¿cuál sería entonces la nueva división de los elementos? Creemos que una primera parte, bastante larga, especie de introducción, debiera ser consagrada a las nociones adquiridas durante el curso de las primeras nociones de cosas y de las primeras manipulaciones: proposiciones y definiciones esenciales de la Geometría cualitativa, de la Geometría de situación. Una segunda parte comprendería el estudio de los desplazamientos en general y de las rotaciones con sus aplicaciones: línea recta, perpendiculares, composición de las rotaciones, plano, círculo, simetrías, geometría radial. Una tercera parte estaría constituída por el estudio del subgrupo de las traslaciones y de sus aplicaciones: paralelismo, teorema de Thales o de las proyecciones, definiciones de las líneas trigonométricas, relaciones métricas. En una cuarta parte se estudiarían las transformaciones de un orden más elevado, la homotecia y la semejanza, la transformación homográfica, la inversión, etc. En fin, en una quinta parte, se estudiarían las áreas y los volúmenes.

Algunos profesores pretenden, como Meray, que las traslaciones deben colocarse completamente al principio de la Geometría. Si pensamos diferentemente es que hemos podido establecer con todo rigor [1] las propiedades del plano y de las traslaciones después de haber hecho previamente la teoría completa de las rotaciones. Deberá observarse, además, que el conjunto de los postulados sobre las rotaciones forma un conjunto independiente, que es la base de la Geometría de Lobatschefs-ki y de Bolyai, y que la introducción del postulado siguiente: *existe en el*

---

(1) *La Geometría elemental basada en el grupo de los desplazamientos* — L'Enseignement mathematique, 15 Marzo 1909.

grupo de los desplazamientos un subgrupo invariante, basta para caracterizar la Geometría euclídea. Así, adoptando la división que preconizamos, cada una de las cuatro primeras partes de la Geometría estaría consagrada al estudio de un grupo de transformaciones diferentes: la 1.ª parte al grupo de transformaciones continuas del espacio, que conduce a la noción de conexidad de las superficies; la 2.ª al grupo de los desplazamientos que podemos llamar *lobatschefskianos*, en el cual sólo se trataría de saber si existe un subgrupo invariante; la 3.ª, al grupo de los desplazamientos *euclídeos*, y en fin, la 4.ª a grupos de transformaciones más generales, homotecia, inversiones, etc.

A aquellos que nos preguntaran por qué no vamos más lejos en esta vía, por qué no empezamos el estudio de la Geometría por el grupo de las transformaciones homográficas, puesto que en él está contenido, como subgrupo, el grupo de los desplazamientos, lo mismo que este último contiene el de las traslaciones, respondemos que es necesario que en alguna parte nos detengamos en nuestra ascensión hacia las alturas donde la vista se extiende más amplia sobre la Geometría. Y si precisamente nos detenemos cuando dominamos todas las propiedades del grupo de los desplazamientos, es porque el panorama que entonces se ofrece a los ojos de nuestra lógica justamente corresponde, punto por punto, propiedad por propiedad, con el que se ofrece a los ojos de nuestro cuerpo cuando examinamos el mundo físico; pues todos los días vemos una multitud de cuerpos sólidos que se conforman a las leyes del grupo de los desplazamientos, y de ellos ninguno vemos que se transformen según los del grupo homográfico más general.

Es esta identidad, este *isomorfismo* entre el mundo lógico del grupo de los desplazamientos y la estructura del mundo real, el mejor argumento en favor de la adopción de las propiedades fundamentales de ese grupo como base de la Geometría. Somos así conducidos al único modo

de exposición que permite dosificar sábiamente la proporción de lógica y de experiencia según la inteligencia, la edad, el grado de madurez de los alumnos, sin cambiar el orden del edificio, puesto que las proposiciones lógicas precisamente se presentan en el mismo orden que los hechos mismos en la naturaleza. Así, se puede seguir a la letra los excelentes consejos que daba Houël en 1883 [1] y con los cuales terminamos.

« Todo el mundo está de acuerdo en repetir que uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas debe ser el de dar más rectitud al espíritu, ofreciéndole un modelo de una lógica inflexible, aplicada a principios ciertos. Para que este fin se alcance, evidentemente es necesario que la enseñanza no se separe de ese rigor que distingue las matemáticas de las demás ciencias, y es esa una condición esencial para que ese estudio sea fructuoso, tanto como gimnasia intelectual como manantial de aplicaciones prácticas.

« Pero el rigor, tal como lo concebimos, no está absolutamente comprometido por la voluntaria omisión de la demostración de una proposición, mientras que lo está por la introducción de una demostración falsa e incompleta. La lógica nada pierde con que provisoriamente se deje una laguna en la serie de razonamientos, con tal que se indique claramente esa laguna, y que no se trate de disimularla.

« Es según esta manera de ver que concebimos la posibilidad de una enseñanza graduada de la Geometría elemental, conducida, en todos sus grados, según su plan único e invariable, siempre sometido a las reglas de la más severa lógica y donde sólo se mostrarían las dificultades a medida que los espíritus estuvieran preparados para abordarlas.

« Para eso el estudio de la Geometría debería ser

(1) *Ensayo crítico sobre los principios fundamentales de la Geometría elemental.* París, Gouthier — Villars.

vuelto a ser hecho sucesivamente en diversos grados de iniciación de los alumnos. Para los principiantes, se trata ante todo de que se familiaricen con las figuras y sus denominaciones, de aprender hechos, de entrever sus más simples e inmediatas aplicaciones, las que sobre todo se relacionan con la vida ordinaria. Se deberá, pues, al principio, multiplicar los axiomas, en lugar de demostraciones, emplear las verificaciones elementales, la analogía, la inducción, no olvidando jamás que es provisorio este modo de exposición. Se ejercitará al alumno en los trazados gráficos, en el manejo de los instrumentos, en la solución de los diversos problemas de levantamiento de planos y de agrimensura, en la construcción de figuras de relieve por medio de hilos y de arcilla plástica, en la representación de figuras por medio de sus proyecciones, etc., etc.

«Los alumnos deberán seguir sucesivamente varios cursos graduados, de los cuales uno comprenderá las materias del curso precedente, más los nuevos desarrollos que se agregarán, dando cada vez más sitio al razonamiento.

«Pero los programas de esos cursos sucesivos no deben trazarse al acaso, independientemente los unos de los otros. Ante todo, habrá que tener cuidado de alterar el orden de las proposiciones para sustituir a una demostración difícil un razonamiento más simple en apariencia y más riguroso. Si alguna demostración ofrece algunas dificultades para la inteligencia del alumno, se suprime, reemplazando solamente por explicaciones, analogías, verificaciones experimentales. Pero la subordinación de las verdades geométricas, tal como la exigirá más tarde un estudio científico y profundo, debe conservarse sin alteración en todos los grados de la enseñanza».

V

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN LOS LICEOS FRANCESES

Primer ciclo (4 años)

DIVISIÓN A

1.er año (2 horas semanales)

Cálculo—Revisión de las operaciones con enteros—Ejercicios de cálculo mental — Problemas con números enteros — Fracciones ordinarias — Reducción de fracciones a común denominador — Operaciones con las fracciones — Números decimales; operaciones — Ejercicios.

Consejos generales — El profesor se abstendrá de toda teoría; su fin debe ser enseñar a los alumnos a efectuar correctamente las operaciones y habituarlos, por numerosos ejemplos, a la significación de esas operaciones.

Las definiciones, en particular las que conciernen a las fracciones, serán constantemente apoyadas con ejemplos concretos.

DIVISIÓN B

1.er año (3 horas semanales)

El programa de la División A, y además, lo que sigue:

Sistema métrico — Longitudes, áreas, volúmenes, pesos, densidades, monedas — Tiempos, velocidades — Enunciado de algunas reglas relativas a la evaluación de áreas y de volúmenes sencillos. — Ejercicios; ejemplos simples de cambio de unidades, sacados del sistema métrico.

Regla de tres por el método de reducción a la unidad — Interés simple — Descuento comercial — Rentas — Problemas simples sobre oligaciones y mezclas.

Consejos generales — Los mismos indicados en la División A, y además los que siguen:

Con ocasión del sistema métrico, de las reglas de interés, etc., el profesor empezará a habituar a los alumnos al empleo de las letras y al uso de fórmulas simples que se presenten naturalmente.

2.° año. (2 horas semanales)

Cálculo — Se complementa lo que en el primero de esta División hay de menos que en el primero de la División B; es decir, desde sistema métrico en adelante.

Consejos generales — Al explicar el sistema métrico, las cuestiones de interés, etc., el profesor empezará a habituar a los alumnos al empleo de las letras y de fórmulas simples. Por lo demás, el empleo del método algebraico permitirá evitar los razonamientos, que, cuando se quiere formularlos en el lenguage ordinario, se presentan bajo una forma complicada y difícil de retener (regla de falsa posición, etc.). La enseñanza dada en esta clase no comprende ninguna teoría de ecuaciones.

El profesor deberá habituar a los alumnos a poner los problemas en ecuación, hablando sólo de cantidades concretas, y, en la resolución de ecuaciones, deberá hacer explicar la transformación colocándose siempre de un punto de vista concreto.

2.º año (3 horas semanales)

Aritmética — Numeración decimal — Adición y sustracción de enteros — Multiplicación de enteros — Producto de una suma o de una diferencia por un número — Producto de factores — Potencias — División de números enteros. Regla práctica — Caracteres de divisibilidad por 2, 5, 9, 3 — Números primos — Reglas prácticas para la descomposición de un número en producto de factores primos, para la investigación del m. c. d. y del m. c. m. — Revisión del sistema métrico.

Geometría y dibujo geométrico — Uso de la regla, de la escuadra, del compás y del transportador — Línea recta y plano — Angulos — Simetría respecto de una recta — Triángulos — Triángulo isóceles — Casos de igualdad de los triángulos — Perpendiculares y oblicuas — Casos de igualdad de los triángulos rectángulos — Rectas paralelas — Suma de los ángulos de un triángulo, de un polígono convexo — Paralelogramo — Rectángulo — Rombo — Cuadrado — Círculo: diámetro: cuerdas y arcos: tangente — Posiciones relativas de dos círculos — Construcción de ángulos y de triángulos — Trazado de perpendiculares y de paralelas — Construcción de círculos, de tangentes.

Ejecución, con instrumentos, de las construcciones explicadas en el curso de geometría — Problemas y ejercicios sencillos relacionados igualmente con el curso de geometría — Ejecución gráfica de la solución encontrada.

3.er año (2 horas semanales)

Aritmética — Productos de factores — Potencia — Caracteres de divisibilidad por 2, 5, 9, 3 — Números primos. Reglas prácticas para la descomposición de un número en producto de factores primos, para encontrar el m. c. d. y el m. c. m. — Ejercicios sobre el sistema métrico decimal, las fracciones y las magnitudes directamente e inversamente proporcionales--Regla práctica para la extracción de la raíz cuadrada de un número entero o decimal con la aproximación de una unidad decimal de orden dado.

Geometría — Uso de la regla, de la escuadra, del compás y del transportador — Línea recta y plano — Ángulos — Triángulos — Triángulo isóceles. Casos de igualdad de los triángulos rectángulos—Rectas paralelas—Suma de los ángulos de un triángulo, de un polígono convexo — Paralelogramo. Rectángulo, Rombo. Cuadrado— Círculo: cuerdas y arcos: tangente — Posiciones relativas de dos círculos—

3.er año (4 1/2 horas semanales)

Aritmética y contabilidad — Fracciones ordinarias — Operaciones — Fracciones decimales — Magnitudes directamente e inversamente proporcionales. Operaciones con los números decimales — Regla práctica para la extracción de la raíz cuadrada de un número entero o decimal, a menos de una unidad decimal dada — Progresiones aritméticas y geométricas — Suma de los términos de progresiones limitadas — Métodos comerciales del cálculo del interés y del descuento — Nota de valores descontables — Cuentas corrientes — Nociones sumarias sobre los valores.

Geometría y dibujo geométrico — Puntos que dividen nna recta en una razón dada — Líneas proporcionales — Propiedades de los bisectrices de un triángulo — Triángulos semejantes — Definición de seno, de coseno y de tangente de un ángulo — Definición de las figuras homotéticas — Polígonos semejantes — Rela-

Construcciones elementales con la recta y el circulo. (1)

4.º año (2 horas semanales.)

Aritmética — Razón y proporción.

Algebra — Números positivos y negativos — Operaciones — Aplicaciones concretas — Monomios; polinomios — Adición, sustracción y multiplicación de los monomios y de los polinomios — División de los monomios — Ecuaciones numéricas de primer grado con una o dos incógnitas.

(1) Véanse las instrucciones para la enseñanza matemática, pág. 532 y siguientes.

ciones métricas en un triángulo rectángulo — Construcción de la cuarta proporcional y de la media geométrica — Poligonos regulares: cuadrado, exágono y triángulo equilátero—Enunciado de la medida de la circunferencia — Medida de las áreas del rectángulo, del paralelogramo, del triángulo, del trapecio, de los poligonos,

Relación de las áreas de dos poligonos semejantes — Area del círculo.

Ejecución, con instrumentos, de las construcciones explicadas en el curso de geometria. Problémas y ejercicios simples relacionados igualmente con el curso de geometría: ejecución gráfica de la solución encontrada — Construcción gráfica de lugares geométricos — Trazado de curvas con la pluma (1)

4.º año (4 horas semanales)

Algebra — Números positivos y negativos — Monomios, polinomios — Adición, sustracción y multiplicación de los monomios y de los polinomios — División de los monomios — Ecuaciones númericas de primer grado con una o dos incógnitas — Variación y signo de la expresión $ax+b$; representación gráfica — Ecuaciones de segundo grado. Rela-

(1) Véase las instrucciones pág. 532 y siguientes.

Geometría — Problemas e interrogaciones sobre el programa del año precedente — Puntos que dividen una recta en una razón dada — Lineas proporcionales — Triángulos semejantes — Definición de seno, de coseno, de tangente y de cotangente de un ángulo — Definición de las figuras homotéticas — Polígonos semejantes — Relaciones métricas en un triángulo rectángulo — Propiedades de las secantes en el circulo — Construcción de la cuarta proporcional y de la media proporcional — Polígonos regulares: cuadrado, exágono y triángulo equilátero — Enunciado de la medida del circulo — Medida de las áreas del rectángulo, del paralelogramo, del triángulo, del trapecio, de los polígonos, del círculo — Relación de las áreas de dos polígonos semejantes. (1)

(1) Véanse las instrucciones, pág. 532 y siguientes.

ciones entre los coeficientes y las raíces — Variaciones de x^2 y $\frac{1}{x}$; representación gráfica — Uso de las tablas de logaritmos y de antilogaritmos de cuatro decimales — Intereses compuestos.

Geometría — Del plano y de la recta en el espacio — Angulo diedro — Rectas y planos paralelos — Recta y plano perpendiculares — Proyección de un polígono — Definición de los ángulos poliedros, del prisma, de la pirámide — Superficies y volúmenes del prisma y de la pirámide — Cono; cilindro: plano tangente — Esferas — Secciones planas de la esfera — Polos — Superficies y volúmenes del cono y del cilindro de revolución — Enunciado de la superficie y del volumen de la esfera.

Levantamiento de planos; agrimensura; nivelación. (1)

Dibujo geométrico (2) — Ejemplos de sombras usuales y práctica razonada del lavado — Dibujos geométricos, en los cuales entran rectas y círculos, tomados en motivos de decoración de superficies planas: parquets, embaldosados, mosaicos, vitraux, lavados con tinta china y colores aplicados a algunos de esos dibujos.

(1) Véanse las instrucciones pág. 532.
(2) Véanse las instrucciones pág. 532.

Segundo ciclo

PROGRAMA COMÚN A LAS SECCIONES A Y B

5.° año (2 horas semanales) (1)

Algebra — Operaciones. Aplicaciones concretas — Números positivos y negativos — Monomios; polinomios — Adición, sustracción, multiplicación de los monomios y de los polinomios — División de los monomios — Ejercicios sobre las ecuaciones de 1.er grado con una o dos incógnitas; desigualdad de 1.er grado con una incógnita — Variación de la expresión $ax+b$; representanción gráfica — Movimiento uniforme — Representación de las variaciones x^2 y $\frac{1}{x}$.

Geometría — Del plano y de la recta en el espacio — Angulo diedro — Rectas y planos paralelos — Recta y plano perpendiculares — Definición del paralelepipedo, del prisma, de la pirámide — Secciones paralelas en un prisma y en una pirámide — Cono y cilindro de revolución; secciones paralelas a la base — Esfera; circulos máximos; circulos menores; polos — Enunciado de las reglas relativas a las superficies y a los volúmenes del prisma, de la pirámide, del ci-

(1) Véanse instrucciones. pág. 532.

PROGRAMA COMÚN A LAS SECCIONES C Y D

5 año (4 1/2 horas semanales) (1)

Algebra — Operaciones con los números positivos y negativos — Monomios; polinomios; términos semejantes — Operaciones: adición, sustracción, multiplicación de monomios y polinomios — División de monomios — Resolución de las ecuaciones de 1.er grado con una incógnita — Desigualdad de 1.er grado — Resolución y discusión de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas — Problemas; ponerlos en ecuación — Discusión de los resultados — Variación de la expresión $a\ x+b$; representación gráfica — Ecuación de 2.° grado con una incógnita (no entrará la teoria de las imaginarias) Relaciones entre los coeficientes y las raices — Existencia y signo de las raices — Estudio del trinomio de 2.° grado — Desigualdad de 2.° grado — Problemas de 2.° grado — Variación del trinomio de 2.° grado; representación gráfica — Variación de la expresión $\frac{a\,x+b}{a'\,x+b'}$; representación gráfica — Progresiones aritméticas y progresiones geo-

(1) Véanse instrucciones pág. 532.

lindro, del cono y de la esfera

Nota — La enseñanza de las matemáticas en 5.° y 6.° año A y B, debe preparar a los alumnos al estudio de la Física. Cada vez que sea posible, los desarrollos teóricos del programa de esas clases se acompañarán con ejercicios numéricos.

El profesor escogerá los datos de esas aplicaciones de tal modo que los alumnos adquieran soltura y seguridad en el empleo de las fracciones, números decimales, sistema métrico y cambios usuales de unidades. No debe temer el hacerles apreciar, con ejemplos, un límite superior del error cometido en los cálculos aproximados más simples.

métricas — Logaritmos — Uso de las tablas de logaritmos de 4 o 5 decimales — Intereses compuestos.

Nota — En lo que se refiere a los logaritmos, el propósito esencial es familiarizar a los alumnos con el empleo de las tablas — Los profesores podrán dar indicaciones muy sumarias sobre la teoria deducida, sea del estudio de las progresiones, sea del estudio de los exponentes.

Geometría — Línea recta y plano — Angulos, sentido de un ángulo — Rectas perpendiculares — Triángulos — rectángulo isóceles — Casos de igualdad de los triángulos — Perpendicular y oblicuas — Triángulo rectángulo — Casos de igualdad — Definición de un lugar geométrico — Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos o de dos rectas.

Rectas paralelas — Suma de los ángulos de un triángulo, de un polígono convexo — Paralelogramos — Figuras simétricas con relación a un punto o a una recta — Dos figuras planas simétricas son iguales.

Círculo — Intersección de una recta y un círculo — Tangente al círculo; las dos definiciones de la tangente — Arcos y cuerdas — Posiciones relativas de dos círculos — Medida de los ángulos — Longitudes proporcionales — Puntos que dividen un segmento

en una razón dada — Definición de la división armónica — Triángulos semejantes — Toda paralela a uno de los lados de un triángulo divide los dos otros lados en partes proporcionales — Recíproca — Definición de un haz armónico — Propiedades de las bisectrices de un triángulo — Lugar geométrico de los puntos cuya razón de las distancias a dos puntos fijos es constante.

Nociones simples sobre la homotecia — Polígonos semejantes — Seno, coseno, tangente y cotangente de los ángulos comprendidos entre 0 y 2 rectos. Relaciones métricas en un triángulo rectángulo o en un triángulo cualquiera. Líneas proporcionales en el círculo. Cuarta proporcional; media proporcional.

Polígonos regulares. Inscripción del cuadrado, del exágono, del triángulo equilátero, del decágono en el círculo. Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes: relación de sus perímetros. Longitud de un arco de círculo. Relación de la circunferencia al diámetro. Cálculo de π (limitarse al método de los perímetros).

Area de los polígonos: área del círculo — Medida del área del rectángulo, del paralelogramo, del triángulo, del trapecio, de un polígono cualquiera — Relación de las áreas de dos polígonos semejantes — Area de un

polígono regular convexo — Area de un círculo, de un sector y de un segmento de círculo — Relación de las áreas de dos círculos.

Nociones de agrimensura — Uso de la cadena y de la escuadra de agrimensor.

Dibujo geométrico (1) (2 horas semanales) — Empleo de los instrumentos para el trazado de líneas rectas y de círculos (regla, compás, escuadra, transportador). Ejecución, con los instrumentos, de construcciones explicadas en el curso de geometría —Dibujos geométricos — Embaldosados — Parquets — Mosaicos — Lavado con tinta china y con colores de algunos de esos dibujos — Croquis a pulso, con cotas, de objetos usuales.

(1) Siempre que sea posible, se confiará la enseñanza del dibujo geométrico en el 2.º ciclo al profesor de matemáticas.

6.º año (2 horas semanales)

Programa obligatorio común a las Secciones A y B (1)

Algebra — Ejercicios sobre las ecuaciones de primer grado, con una o varias incógnitas, y de segundo grado con una incógnita — Variación del trinomio de segundo grado; representación gráfica. Movimiento uniformemente variado — Variación de la expresión $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; representación gráfica.

(1) Véanse las instrucciones pág. 532.

6.º año (5 horas semanales)

Programa común a las Secciones C y D (2)

Geometría—Plano y linea recta — Determinación de un plano — Paralelismo de las rectas y de los planos — Recta y plano perpendiculares — Propiedades de la perpendicular y de las oblicuas trazadas de un mismo punto a un plano — Angulo diedro:

(2) Véanse las instrucciones pág. 532.

Geometría — Medida de los ángulos: grados sexagesimales y centesimales, radiantes — Triángulos semejantes— Definición del seno, del coseno y de la tangente de un ángulo comprendido entre 0 y 2 rectos — Sinusoide — Relaciones métricas en el triángulo y en el círculo — Resolución de los triángulos rectángulos — Medida de las áreas planas — Nociones elementales sobre la simetria — Ejercicios numéricos sobre las reglas relativas a las superficies y a los volúmenes del prisma, de la pirámide, del cilindro, del cono y de la esfera.

Nota — La enseñanza de las matemáticas en los años 5.° y 6.° debe preparar a los alumnos para el estudio de la Física. Siempre que sea posible, los desarrollos teóricos del programa de esas clases serán acompañados de ejercicios numéricos. El profesor escogerá los datos de esas aplicaciones de tal modo que los alumnos adquieran soltura y seguridad en el empleo de las fracciones, de los números decimales, del sistema métrico y de los cambios usuales de unidades. No temerá el hacerles apreciar, con ejemplos, un límite superior del error cometido en los cálculos aproximados más simples.

sentido: ángulo plano correspondiente a un diedro — Planos perpendiculares entre si — Proyección de un área plana — Simetria con relación a una recta — Simetria con relación a un punto — Simetria con relación a un plano: este modo de simetría se reduce al primero — Angulos triedros — Disposición de los elementos. Triedros simétricos. Cada cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos. Límite de la suma de las caras de un triedro. Límite de la suma de las caras de un poliedro convexo — Triedros suplementarios. Aplicaciones — Casos de igualdad de los triedros.

Homotecia — Secciones planas paralelas de ángulos poliedros. Areas.

Poliedros. Poliedros homotéticos. Prisma. Pirámides. Volúmenes de los paralelepipedos y de los prismas. Volumen de la pirámide. Volumen del tronco de pirámide de bases paralelas. Volumen del tronco de prisma triángular—Razón de los volúmenes de dos poliedros homotéticos — Dos poliedros simétricos son equivalentes — Cilindro de base circular. Plano tangente — Cono de base circular. Plano tangente. Secciones paralelas a la base — Superficies simples de revolución: cilindro, cono — Esfera. secciones planas: polos: plano tangente. Cono y cilindro cir-

Programa facultativo

Algebra — Nociones de la derivada; significación geométrica de la derivada. El signo de la derivada indica el sentido de la variación; aplicaciones a la variación de las funciones

$$\frac{a\,x + b}{a'\,x + b'},\ a\,x^2 + b\,x + c$$

Geometría—Homotecia y semejanza en el plano — Homotecia en el espacio — Nociones sobre los polígonos regulares. Triedros.

Trigonometría — El programa será el mismo que el de la clase de sexto año C y D, exceptuando lo que se refiere a los problemas de división de los arcos. (Véase la pág. 521).

Nota — El profesor encargado de una enseñanza facultativa es el juez de los desarrollos que crea poder dar a las diversas partes del programa correspondiente, según la preparación de los alumnos a los cuales se dirija.

Sin embargo, se recomienda dar nociones sobre todas las partes del programa.

cunscritos — Superficie lateral del cilindro y del cono de revolución — Volumen del cilindro y del cono circular — Area de la zona. Area de la esfera — Volumen de la esfera.

Geometría descriptiva—Proyección y cota de un punto — Representación de la recta — Pendiente—Distancia de dos puntos — Rectas concurrentes — Rectas paralelas.

Representación del plano—Escala de pendiente — Planos paralelos — Rebatimiento sobre un plano horizontal—Angulo de dos rectas — Distancia de un punto a una recta — Intersección de rectas y de planos — Rectas y planos perpendiculares — Distancia de un punto a un plano — Angulo de una recta y un plano — Angulo de dos planos — Representación del punto, de la recta y del plano por medio de dos planos de proyección — Intersecciones de rectas y de planos — Rectas y planos paralelos — Rectas y planos perpendiculares — Rebatimiento de un plano sobre un plano horizontal—Cambio de plano vertical — Volver a considerar los problemas precedentemente enunciados relativos a las distancias y ángulos.

Trigonometría — Funciones circulares (seno, coseno, tangente y cotangente) — Relaciones entre las funciones circulares de un mismo arco. Cálculo de las fun-

ciones circulares de algunos arcos:

$$\frac{\pi}{4}. \frac{\pi}{3}, \text{ etc.}$$

Teoría de las proyecciones.

Fórmulas de adición para el seno, el coseno y la tangente — Expresión de sen $2a$, cos $2a$, *tg* $2a$ — Todas las funciones circulares del arco a se expresan racionalmente en función de $tg\,\frac{a}{2}$ — Conociendo $cos a = b$ encontrar los valores del *sen* y del *cos* de los arcos $\frac{a}{2}$; elección de los valores correspondientes a un arco a dado — Conociendo $tg\,a$ encontrar los valores de las tg de los arcos $\frac{a}{2}$; elección del valor correspondiente a un arco a dado.

Transformar en producto la suma o la diferencia de dos funciones circulares, senos, cosenos o tangentes.

Problema inverso.

Uso de las tablas de logaritmos de cuatro o cinco decimales — Resolución de los triángulos rectángulos — Resolución o discusión de algunas ecuaciones trigonométricas simples—Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. (No se tratarán las equivalencias de los sistemas).

Algebra — Ecuación y trinomio de 2.° grado — Ejemplos numéricos en que la variable puede ser

una linea trigonométrica — Noción de la derivada; significación geométrica de la derivada. El signo de la derivada indica el sentido de la variación; aplicaciones a la variación de las funciones

$$\frac{ax+b}{a'x+b'},\ ax^2+bx+c,\ ax+b+\frac{c}{x},$$

y a la variación de la función ax^3+bx^2+cx+d en que los coeficientes son numéricos.

Estudio de un movimiento rectilineo uniforme o uniformemente variado — Definición de la velocidad y de la aceleración en un movimiento rectilinco por las derivadas.

CLASE DE FILOSOFÍA

7.º *año* (*2 horas facultativas*) (1)

Funciones de una variable—Representación gráfica de la variación de un fenómeno que depende de una sola variable; curvas de las temperaturas, de las presiones; aplicación a la estadística. Noción de funciones; representación gráfica de funciones muy simples:

$$y=ax,\ y=ax+b,\ y=x^2,\ y=x^3,$$
$$y=\frac{1}{x}.$$

CLASE DE MATEMÁTICAS

7.º *año* (*8 horas semanales*)

Nota — Este programa es un programa máximo, del cual no son exigibles todas las partes en el bachillerato. (Decreto del 29 de Julio de 1911).

Aritmética — Numeración decimal — Adición, sustracción, multiplicación y división de los números enteros Teoremas fundamentales referentes a esas operaciones. Explicación de las reglas prácticas para efectuar las operaciones — No cambia el resto de una suma, de una diferencia, de un producto, aumentando o disminuyendo un término o un

(1) Véanse instrucciones pág. 532.

Construcción de una recta definida por una ecuación numérica de 1.er grado entre x, y; pendiente o coeficiente angular, ordenada en el origen. Coeficiente angular de la recta que une dos puntos — Uso de papel cuadriculado — Resolución de dos ecuaciones numéricas de 1.er grado con dos incógnitas por la intersección de dos rectas.

Derivadas — Derivada de una suma, de un producto, de un cociente, de la raiz cuadrada de una función.

Variación de las funciones.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},\ ax^3+bx^3+cx+d$$

en las que los coeficientes tienen valores numéricos—Velocidad en el movimiento rectilineo variado.

Numerosas aplicaciones numéricas tomadas de la geometría y relacionadas con las áreas (rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio, circulo, cilindro recto, cono recto, zona, esfera) y con los volúmenes (paralelepípedo, prisma, pirámide, cilindro cono, esfera).

Esas aplicaciones numéricas permitirán hacer una revisión del sistema métrico y de las reglas de cálculo de los números enteros, de las fracciones ordinarias y de las fracciones decimales.

Geometría — Estudio de las propiedades elementales de la elipse, de la hipérbola y de la parábola, factor en un múltiplo del divisor. Restos de la división de un número entero por 1, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3, 11. Caracteres de divisibilidad por cada uno de esos números — M. C. D. de dos o varios números—Números primos entre sí — Todo número que divide un producto de dos factores, y que es primo con uno de esos factores, divide al otro — M. C. M. de dos o varios números—Definición y propiedades elementales de los números primos — Descomposición de un número entero en un producto de factores primos. Esta descomposición sólo se puede hacer de un modo. Composición del M. C. D. y del M. C. M. de dos o varios números descompuestos en factores primos.

Fracciones ordinarias—Reducción de una fracción a su más simple expresión — Reducción de varias fracciones al mismo denominador — Menor denominador común — Operaciones con las fracciones ordinarias.

Números decimales—Operaciones (considerando las fracciones decimales como caso particular de las fracciones ordinarias) — Cálculo de un cociente con una aproximación decimal dada — Reducción de una fracción ordinaria a fracción decimal; condición de posibilidad—Cuando la reducción es imposible, la fracción ordinaria puede ser considerada como el límite de una fracción decimal periódica ilimitada.

Trigonometría — Resolución de los triángulos; aplicaciones numéricas.

Nota — Siendo facultativo el programa precedente y no teniendo sanción, gozará el profesor de la más amplia libertad para adaptar su enseñanza a la preparación y las necesidades de sus alumnos. Absolutamente no estará obligado a tratar todo el programa, y podrá — si sólo tuviera como alumnos futuros médicos salientes de 6.° año A y B y que no hayan seguido la conferencia facultativa de matemáticas — limitarse a «la revisión del sistema « métrico, y de las reglas de « cálculo de los números enteros, « de las fracciones ordinarias y « de las fracciones decimales» con numerosas aplicaciones.

Cuadrado de un número entero o fraccionario; composición del cuadrado de la suma de dos números — El cuadrado de una fracción no puede nunca ser igual a un número entero — Definición y extracción de la raiz cuadrada de un número entero o fraccionario con una aproximación decimal dada — Sistema métrico — Ejercicios — Razón de dos números — Razones iguales — División en partes proporcionales.

Medida de las magnitudes — Definición de la razón de dos magnitudes de la misma especie — Teorema: la razón de dos magnitudes de la misma especie es igual al cociente de los números que las miden — Magnitudes directamente o inversamente proporcionales — Problemas — Definición del error absoluto y del error relativo — Determinación del límite superior del error cometido en una suma, una diferencia, un producto, un cociente, conociendo los límites superiores de los errores que afectan a los datos.

Algebra — Números positivos y negativos. Operaciones con esos números — Monomios, polinomios; adición, sustracción, multiplicación y división de los monomios y de los polinomios — Principios relativos a la resolución de las ecuaciones — Ecuaciones de primer grado — Ecuaciones de 2.° grado con una incógnita (no se desarrollará la

teoria de las imaginarias) — Ecuaciones simples que se reducen a 2.º grado — Desigualdades de 1.º y 2.º grado — Problemas de 1.º y 2.º grado — Progresiones aritméticas y progresiones geométricas — Suma de los cuadrados y de los cubos de los n primeros números enteros — Logaritmos vulgares — Uso de las tablas de cinco decimales — Intereses compuestos y anualidades — Coordenadas de un punto — Representación de una recta por una ecuación de 1.er grado — Coeficiente angular de una recta — Construcción de una recta dada por su ecuación — Variaciones y representaciones gráficas de las funciones.

$$y = ax + b\,;\; y = \frac{ax+b}{a'x+b'}\,;$$
$$y = ax^2 + bx + c\,;$$
$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

derivada de una suma, de un producto, de un cociente, de la raiz cuadrada de una función, de $sen\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $cotg\,x$. Aplicación al estudio de la variación, a la investigación de los máximos o de los mínimos de algunas funciones simples, en particular de las funciones de las formas

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\,;\; x^3+px+q,$$ en

las que los coeficientes tienen

valores numéricos—Derivada del arco de una curva considerada como función de la abscisa. (Se admitirá la noción de área).

(El profesor dejará de lado todas las cuestiones sutiles que resultan de una exposición rigurosa de la teoria de las derivadas; tendrá principalmente en vista las aplicaciones y no deberá temer en recurrir a la intuición).

Trigonometría—Funciones circulares—Adición y sustracción de los arcos — Multiplicación por 2 — Resolución de los triángulos — Aplicaciones de la trigonometria a las diversas cuestiones relativas al levantamiento de planos.

(No se tratará de la construcción de las tablas trigonométricas).

Geometría — Recta — Angulos — Paralelismo — Polígonos — Circulo — Plano; rectas y planos — Angulos diedros; ángulos poliedros.

Translación. Rotación. Simetrias — Homotecia y semejanza — Relaciones métricas — Polígonos regulares — Prisma, pirámide, cilindro, cono, esfera — Areas y volúmenes — Potencia de un punto con relación a un círculo y con relación a una esfera. Ejes radicales. Planos radicales — Polar de un punto con relación a un circulo; plano polar de un punto con relación a nna esfera.

Inversión. Aplicaciones. Aparato de Peaucellier. Proyección estereográfica.

Vectores — Proyección de un vector sobre un eje; momento lineal con relación a un punto; momento con relación a un eje — Aplicación a un par de vectores. Proyecciones centrales — Plano del cuadro. Perspectiva de un punto, de una recta, de una linea. Punto de fuga de una recta. Perspectiva de dos rectas paralelas. Linea de fuga de un plano. Concepción de la recta en el infinito de un plano.

Cónicas—Elipse: trazado: tangente; problemas simples sobre las tangentes. Ecuación de la elipse referida a sus ejes. Elipse considerada como proyección del circulo; problemas simples sobre las tangentes: intersección de la elipse y de una recta.

Hipérbola: trazado; tangente; asintotas; problemas simples sobre las tangentes. Ecuación de la hipérbola referida a sus ejes.

Parábola—Trazado; tangente; problemas simples sobre las tangentes. Ecuación de la parábola referida a su eje y a la tangente en el vértice.

Definición común de esas curvas por medio de un foco y de una directriz.

Secciones, planas de un cono, de un cilindro de revolución.

Geometría descriptiva — Reba-

timientos. Cambio de un plano de proyección; rotación alrededor de un eje perpendicular a un plano de proyección — Aplicación a las distancias y a los ángulos: distancia de dos puntos, de un punto a una recta, de un punto a un plano; menor distancia de dos rectas, una de las cuales es vertical, o de dos rectas paralelas a un mismo plano de proyección: perpendicular común a esas rectas — Angulo de dos rectas; ángulo de una recta y de un plano; ángulo de dos planos.

Proyección de un círculo. Esfera; sección plana, intersección con una recta. Cono y cilindro de directriz circular; plano tangente pasando por un punto o paralelo a una recta; sombras; contornos aparentes; secciones planas. Conos y cilindros circunscriptos a la esfera. Sombras. Representación de una superficie por curvas de nivel. Cota de un punto de la superficie cuya proyección horizontal es dada. Pendiente de una línea trazada sobre una superficie. Líneas de igual pendiente.

Aplicación de las consideraciones precedentes a las cartas topográficas.

Planimetría y nivelación. Líneas y tintas convencionales — Lectura de una carta topográfica y en particular de la carta del Estado Mayor. Uso de la carta sobre el terreno.

Observación importante. — Debo hacer notar que con el título de matemáticas, como asignatura de la *Sección Matemática,* figuran en los programas, además de las partes indicadas, las siguientes:

Cinemática. — Unidades de longitud y de tiempo — Del movimiento. Su relatividad. Trayectoria de un punto — Ejemplos de movimiento — Movimiento rectilíneo. Movimiento uniforme: velocidad, su representación por un vector — Movimiento variado; velocidad media; velocidad en un instante dado, su representación por un vector aceleración media; aceleración en un instante dado, su representación por un vector — Movimiento uniformemente. variado.

Movimiento curvilíneo — Velocidad media y velocidad en un instante dado, definidas como vectores. Valor algebraico de la velocidad. Hodógrafo. Aceleración.

Movimiento circular uniforme, velocidad angular; proyección sobre un diámetro; movimiento oscilatorio simple sobre una recta.

Cambio del sistema de comparación. Composición de las velocidades — Ejemplos y aplicaciones (no insistir sobre las aplicaciones puramente geométricas).

Movimiento de translación de un cuerpo sólido. Deslizaderas rectilíneas.

Movimiento de rotación de un cuerpo sólido alrededor de un eje. Arboles y cojinetes. Pivotes y crapodinas. Goznes y charnelas.

Estudio geométrico de la hélice. Movimiento elicoidal de un cuerpo. Tornillo y tuerca.

Transformaciones simples de movimiento estudiadas del punto de vista práctico: correas de trasmisión, ruedas dentadas, bielas y manivelas. (No se estudiará los detalles de los mecanismos).

Dinámica y Estática. — Inercia. Fuerza: su representación por un vector. Masa. Independencia de los efectos de las fuerzas. Composición de las fuerzas.

Equilibrio de un punto material libre. Equilibrio de un

punto material sobre una curva o sobre una superficie. Equilibrio de un punto material sobre un plano cuando se tiene en cuenta el frotamiento.

Movimiento de un punto pesado según una vertical.

Movimiento parabólico de un punto pesado.

Frotamiento de deslizamiento. Movimiento de un punto, pesado sobre una línea de mayor pendiente de un plano con o sin frotamiento.

Trabajo de una fuerza aplicada a un punto material. Unidad de trabajo.

Trabajo de una fuerza constante, de una fuerza variable. Trabajo elemental.

Trabajo total. Evaluación gráfica. Trabajo de la resultante de varias fuerzas. Teorema de las fuerzas vivas para un punto material. Ejemplos simples. Fuerzas aplicadas a un cuerpo sólido. — Fuerzas paralelas. Centro de las fuerzas paralelas. Centro de gravedad: su investigación en algunos casos simples; triángulo, trapecio, cuadrilátero, prisma, pirámide.

Pares: composición de pares.

Reducción de las fuerzas aplicadas a un sólido, a dos fuerzas, o a una fuerza y un par.

Condiciones de equilibrio de un cuerpo sólido. Caso de tres fuerzas, de fuerzas paralelas, de fuerzas situadas en un mismo plano.

Equilibrio de un cuerpo móvil alrededor de un eje fijo, de un punto fijo, o bien sujeto a reposar sobre un plano fijo.

Máquinas simples en estado de reposo y en estado de movimiento — Palanca. Carga del punto de apoyo. Torno. Polea fija y polea móvil.

Polipastos, cric, plano inclinado.

Se verificará que si una máquina simple está en movimiento, las condiciones de equilibrio estando llenadas en cada instante, el trabajo elemental de la potencia es igual y de signo contrario al de la resistencia.

Enunciado del teorema general de las fuerzas vivas.

Aplicación a las máquinas. Trabajo motor y trabajo resistente.

Trabajo de las resistencias pasivas. Rendimiento de una máquina. Indicaciones sobre el empleo de los volantes y de los frenos.

Cosmografía — Esfera celeste. Distancia angular. Altura y distancia cenital. Teodolito.

Leyes del movimiento diurno. Meridiano. Polo. Día sideral.

Ascensión recta y declinación. Anteojo meridiano.

Tierra — Coordenadas geográficas. Dimensiones y relieve de la Tierra. Mapamundi. Cartas geográficas.

Sol — Movimiento propio aparente sobre la esfera celeste. Eclíptica. Desigualdad de los días y de las noches en las diversas latitudes. Estaciones. Año trópico y año sideral. Hora sideral; hora media; hora legal.

Calendarios juliano y gregoriano.

Luna — Movimiento propio aparente sobre la esfera celeste. Fases — Rotación. Variación del diámetro aparente. Eclipses de Luna y de Sol.

Planetas — Sistema de Copérnico — Leyes de Kepler — Ley de Newton y sus consecuencias — Nociones sumarias sobre las distancias, las dimensiones, la constitución física del Sol, de los planetas y de sus satélites.

Cometas: estrellas errantes; bólidos.

Estrellas: constelaciones — Nebulosas — Vía láctea.

VI

INSTRUCCIONES OFICIALES RELATIVAS A LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Modificaciones introducidas en el plan de estudios de los Liceos y Colegios de varones, 31 de Mayo de 1902

(Decreto del 27 y 28 de Julio y 8 de Setiembre de 1905)

Los programas de matemáticas deben ser considerados como índices de las materias que hay necesidad de enseñar en las diferentes clases; el profesor tiene amplia libertad para adoptar tal o cual orden que le convenga y emplear los métodos que le parezcan más provechosos para los alumnos que dirige.

En el segundo ciclo, teniendo los estudios por sanción el examen del bachillerato, el profesor debe naturalmente exponer todo lo que figura en el programa; en el primer ciclo, queda libre de toda preocupación de examen y no tiene en vista más que el desarrollo intelectual de sus alumnos; puede pues, si lo juzga útil, descuidar ciertos puntos e insistir más extensamente sobre las partes más accesibles o más necesarias a los alumnos particulares que le han sido confiados; el programa será considerado como un programa máximum: más vale que los niños adquieran conocimientos precisos de poca extensión que tener ideas vagas sobre temas muy variados.

Si es indispensable dejar al profesor libertad amplia en la elección de los métodos para que su enseñanza tenga algún alcance, conviene sin embargo determinar bien el espíritu a que debe subordinarse esa enseñanza con el fin de conservarse, en su conjunto, una dirección única, evitando que el pase de una clase a otra sea para el alumno una causa de perturbación, en sus estudios. Se pide, pues, a los profesores inspirarse en las indicaciones

que van a continuación relativas a los programas de los diferentes ciclos.

Primer ciclo B

No debe perderse de vista que los alumnos son muy jóvenes y que algunos dejarán o abandonarán el liceo después del cuarto año; por eso los ejercicios prácticos deberán ser frecuentes refiriéndose a cosas reales y de ningún modo ficticias, la teoría se reducirá a explicaciones dadas sobre ejemplos concretos, por lo menos al principio; no es sino poco a poco que se podrá, con muchas precauciones, acostumbrar a los alumnos a las nociones abstractas las más simples, mostrando con numerosos ejemplos la necesidad de una definición precisa, de un raciocinio puramente lógico, insistiendo oportunamente sobre los errores que pueden cometerse, si se razona sobre objetos mal definidos, sobre figuras de las que no se ha determinado exactamente los elementos y su posición. Las compilaciones de problemas recreativos darán numerosos ejemplos que impresionarán la mente de los alumnos; citemos, al azar, la demostración de la igualdad de 64 a 65, de un ángulo recto y de un ángulo obtuso, etc.

Aritmética. — Los alumnos deberán ejercitarse en el cálculo numérico y en las resoluciones de problemas cuya solución no exige artificio alguno; no hay ningún interés, en exigir a los alumnos que se atengan al empleo de procedimientos puramente de aritmética, si el álgebra proporciona una solución simple e inmediata a una pregunta. Se insistirá sobre el orden de magnitud de los resultados, llamando la atención sobre los errores que el buen sentido puede evitar; haciendo variar los datos de un problema, reemplazando, por ejemplo, metros por centímetros, se pedirá que se dé anticipadamente la variación de la magnitud del nuevo resultado con relación al antiguo: lo que es necesario evitar es que el alumno efectúe mecá-

nicamente cálculos, sin darse cuenta a cada momento, de su relación con la realidad.

El programa de contabilidad ha sido reducido y lo suprimido lo suplen las indicaciones sobre los cálculos prácticos utilizados en la banca y comercio; se ejercitarán los alumnos, teniendo cuidado de no operar más que sobre bases concretas sacadas de las operaciones reales.

El profesor debe tratar esta parte del programa con tanto más cuidado cuanto que ella ha sido considerablemente simplificada y que esas nociones pueden ser indispensables a los alumnos que abandonan el liceo o colegio después del primer ciclo.

La parte teórica queda reducida al estudio de la suma, sustracción, multiplicación de los números enteros, a la averiguación de los caracteres de divisibilidad, a las fracciones, haciendo este estudio sobre ejemplos concretos.

Sin embargo, no hay en eso nada absoluto: si un alumno desea darse cuenta del mecanismo de una operación, de la razón de ser de una regla dada, habrá interés en satisfacer ese deseo y sería perjudicial creer que no es necesario.

Algebra. — Habiendo sido practicados los ejercicios de las clases quinta y cuarta (2.º y 3.er año) de las partes más importantes del álgebra, se podrá precisarlos en la tercera clase (4.º año) y dar de ellos una teoría elemental. Los enunciados de los teoremas deben ser precisos, pero es inútil insistir mucho sobre las excepciones que pueden presentarse: es suficiente que el alumno sepa que la proposición que aplica no es verdadera sino bajo ciertas condiciones; si, en un caso particular esas condiciones no son satisfechas, sabrá que debe tratar el problema en sí mismo, y eso será un ejercicio mejor, que aquel que consistiría en buscar, por un esfuerzo de memoria, a qué modificaciones del teorema corresponde ese caso particular.

El estudio de las variaciones de una función, se acompañará de una representación gráfica, tan exacta como

sea posible. La curva, una vez trazada, servirá para determinar una coordenada en función de la otra; la comparación de los resultados gráficos, a los números calculados directamente, permitirá hacer apreciar la importancia de la precisión en el dibujo, y se acostumbrará así el alumno a darse cuenta de la magnitud de la aproximación que puede dar el procedimiento gráfico.

Geometría. — La enseñanza de la Geometría debe ser esencialmente concreta; tiene por fin clasificar y precisar las nociones adquiridas por la experiencia cuotidiana, deducir de ella otras más ocultas y mostrar sus aplicaciones a los problemas que se presentan en la práctica. Estando excluída toda definición puramente verbal, no se deberá hablar de un elemento nuevo sino dando su representación concreta e indicando su construcción: esto exige que el orden generalmente adoptado sea modificado: en particular, que la definición del círculo sea introducida desde el principio, y que el uso de los instrumentos de dibujo sea indicado a medida que las necesidades lo exijan. Si el programa está redactado en el orden habitual, es con el fin de no imponer ningún orden particular; queda entendido que aquel que está indicado no es el que se seguirá en la enseñanza.

Desde el punto de vista de la explicación de los hechos, el profesor deberá recurrir a la experiencia y admitir resueltamente como verdad experimental todo aquello que parezca evidente a los niños: no hay ninguna necesidad de demostrar la igualdad de los ángulos rectos, de los ángulos correspondientes, de la existencia de la intersección de un círculo y de una recta de la cual un punto es inferior al circulo, etc. El alumno no comprende que eso necesite demostrarse y sólo retendría palabras desprovistas de sentido; se puede, y eso es deseable, hacer sentir en ciertos casos la necesidad de una demostración; pero no es necesario dar esta última sino cuando el alumno está convencido de que ella es indispensable.

Así se tendrá la oportunidad de probar que existen

dos certezas de órdenes diferentes: la una, experimental, que pertenece a las ciencias físicas; la otra, lógica, que es la de las verdades matemáticas; pero habría un grave inconveniente en dar a esta última una importancia que no tiene en realidad y lanzar el descrédito sobre la primera que, necesario es confesarlo, es la única que poseemos, ya que los principios matemáticos no tienen otros fundamentos, por lo menos para los alumnos.

Lo que convendrá hacer resaltar, es la importancia del razonamiento lógico para reducir al mínimum los hechos experimentales; sería fácil multiplicar los ejemplos: si se construye un decágono regular inscripto, se comprueba que es más o menos imposible cerrarlo; al contrario, tomando por lado de un polígono regular la mitad del lado del triángulo equilátero, se obtiene sensiblemente un heptágono regular; si se mide la suma de los ángulos de un triángulo, se encuentran cifras próximas a 180°, etc. Esos ejemplos muestran que la experiencia hace presentir una verdad, pero es insuficiente para hacerla conocer de una manera precisa; si es, pues, posible, con la ayuda de un razonamiento lógico, poner esta verdad en evidencia o invalidar lo que parecía dar la experiencia, hay una ventaja en hacerlo; es fácil igualmente hacer resaltar el interés práctico que presenta el método puramente lógico, insistiendo en que él ha hecho desaparecer toda incertidumbre sobre los resultados. Se habrá preparado así el estudio de la geometría, que será hecho en el segundo ciclo, donde los alumnos ya advertidos no se asombrarán del cuidado minucioso con que se demuestran los teoremas.

Parece facilitar la enseñanza de la geometría, un llamado constante a la noción del movimiento; es así que el paralelismo será unido a la noción experimental de traslación; que el estudio de las rectas y los planos perpendiculares resultará de la rotación; la idea de la igualdad estará ligada a la del trasporte de las figuras, que será precisada introduciendo la noción tan simple de orientación.

El dibujo está llamado a desempeñar un papel importante en la enseñanza de la geometría así concebida; será necesario hacer ejecutar muy exactamente las construcciones indicadas en el curso y mezclar íntimamente el cálculo a las medidas efectuadas directamente. Es sobre todo en la tercera clase (4.º año) que se podrá interesar a los alumnos haciéndoles ejecutar dibujos muy simples relativos a las sombras y a las secciones planas; no sería el caso de indicar los métodos de la geometría descriptiva y de la geometría cotada; cada cuestión deberá ser estudiada en sí misma, y el ingenio del alumno podrá ejercitarse por la averiguación de los medios más adecuados para dar la solución del problema; tendrá que servirse de los teoremas más importantes del curso y así podrá juzgar de su utilidad: nada impedirá hacer construir el cuerpo representado por el plano, calcular sus elementos, medirlos después en el dibujo ó en el cuerpo mismo; la comparación de los diferentes resultados permitirá apreciar el valor de cada procedimiento.

El dibujo no es, por otra parte, el único auxiliar de esta enseñanza; hay otros que tienen una importancia aún mayor porque hacen mejor resaltar la relación de las teorías y las aplicaciones.

En particular, sería interesante poner un objeto de forma simple en las manos del alumno, pedirle que efectúe sobre ese objeto todas las medidas que considere necesarias, para poder reproducirlo después por medio de un dibujo, evaluar la superficie, el volumen, etc., significando los resultados obtenidos con verificaciones experimentales.

En el mismo orden de ideas, se recomienda ejercitar a los alumnos en levantamiento de planos, lo que podría hacerse sin salir del establecimiento.

Es fácil trazar una recta que una dos puntos situados en salas diferentes, medir la distancia de esos puntos, etc.; se insistirá por otra parte sobre la intervención, en esas aplicaciones, de teoremas que pudieran haber parecido de orden puramente especulativo.

Al lado de esos ejercicios prácticos, que una colección de modelos y de aparatos simples facilitaría mucho, habrá que habituar a los alumnos a la solución de problemas muy simples, tratando de hacerles adivinar su solución y desarrollando así su intuición, exigiendo después una demostración rigurosa, insistiendo sobre la importancia de cada frase, mostrando, si hay necesidad, cómo una palabra mal elegida o mal definida puede, según la interpretación que se le da, conducir a conclusiones diferentes.

Primer ciclo A y segundo ciclo A y B

La enseñanza de las matemáticas en estos ciclos deberá ser practicada desde el mismo punto de vista del primer ciclo B.

No permitiéndole desarrollar extensamente su curso el poco tiempo de que dispone el profesor, deberá limitarse a dar en geometría una idea de las formas de los cuerpos y podrá dejar de lado, si lo juzga conveniente, toda teoría un poco abstracta. Los ejercicios deberán consistir sobre todo en problemas sobre las áreas y los volúmenes, insistiendo en la elección de las unidades y haciendo estudiar sin cesar el sistema métrico; construcciones muy simples, pero ejecutadas con cuidado pueden constituir excelentes ejercicios: eso no podrá hacerse sino en las clases que tengan alumnos deseosos de estudiar más tarde ciencias en las cuales se les dará para resolver verdaderos problemas de geometría, teoremas para demostrar lugares geométricos.

Las demostraciones no serán hechas sino cuando un número suficiente de alumnos esté en estado de comprenderlas; en cuanto a los volúmenes se limitará a los enuncidados de las reglas prácticas, o a casos simples: se justificará esas reglas empleando el método infinitesimal, sin suscitar en este punto ninguna dificultad.

Conferencias facultativas. — En las conferencias destina-

das a los alumnos que desean hacer estudios científicos después de haber seguido los segundos ciclos A y B tiene el profesor una gran libertad; teniendo en su clase discípulos inteligentes y trabajadores, él será el solo juez del desarrollo que puede dar a su curso; lo importante es que forme alumnos que puedan comprender las matemáticas; no es necesario que sepan mucho; lo que es indispensable es que vayan comprendiendo los principios y se hayan habituado al razonamiento lógico.

Segundo ciclo C y D

Los programas del segundo ciclo científico han sido concebidos de manera que permitan a los alumnos que entran en matemáticas A o B poseer a fondo los elementos de geometría, álgebra y trigonometría.

La forma que debe darse a la enseñanza es la adoptada actualmente, habiendo los estudios hechos en el primer ciclo preparado a los alumnos para recibir una enseñanza lógica; no se perderá de vista que sólo haciendo numerosos ejercicios es que se acostumbra a los alumnos a manejar con seguridad los elementos de que disponen.

Será bueno hacer resaltar los lazos íntimos entre las diferentes partes del curso, enseñando simultáneamente la parte algebraica y la parte geométrica; no hay ningún inconveniente en introducir las relaciones trigonométricas en las demostraciones geométricas, en utilizar para la determinación de los volúmenes el método infinitesimal, que se puede presentar con todo rigor en los casos simples.

Matemáticas A y B

En matemáticas A y B, el profesor no tendrá que hacer cursos sobre las materias ya estudiadas en las clases de Segunda y Primera, de álgebra, trigonometría, geo-

metría y geometría descriptiva; más, deberá asegurarse por medio de interrogaciones y ejercicios, que todos los alumnos las estudian y las poseen.

En particular, sería interesante reunir en geometría todo lo que es descriptivo, todo lo que es métrico, relacionado el estudio del espacio con el del plano; esto no presentaría dificultad alguna para alumnos que ya hayan hecho un primer estudio de la geometría y habría la ventaja de agrupar los hechos análogos, dando de esta manera una vista de conjunto, sin la cual resulta difícil coordinar las ideas.

Apenas si hay necesidad de insistir, sobre la importancia que debe darse a los ejercicios prácticos, tales como levantar planos, ejecución de trazados o de dibujos; sólo a condición de hacer de ellos un gran número es que el alumno retendrá la geometría descriptiva y se aficionará a ella.

En mecánica no se suscitará ninguna dificultad sobre los principios: el principio de la independencia de los efectos de las fuerzas podrá ser reducido al hecho que, si varias fuerzas obran en un instante sobre un punto material, la aceleración que posee en ese instante es la suma geométrica de las aceleraciones que poseería si cada una de las fuerzas obrara sola. El profesor deberá evitar los desarrollos y los ejercicios de exclusivo interés geométrico: es para suprimir toda ocasión de desarrollos de esa clase que los teoremas referentes a los vectores han sido reducidos al mínimum indispensable, y puestos en el programa de geometría, donde se presentan bajo su verdadero aspecto. El profesor deberá elegir ejercicios de mecánica de carácter práctico, refiriéndose a mecanismos, movimientos y equilibrios familiares a los alumnos; deberá proponer problemas precisos, con bases numéricas, tratando de familiarizar a los principiantes con los diversos sistemas de unidades y con el empleo del sistema métrico; evitará las generalidades y el abuso del cálculo, ejercitando a los alumnos en razonar directamente sobre

cada cuestión. En la explicación de la realización práctica de los movimientos helicoidal y de las transformaciones de movimientos usuales en las máquinas, el profesor no se limitará a figuras ni tampoco a modelos: deberá mostrar a los alumnos máquinas usuales, las analizará con ellos, les enseñará las relaciones mutuas de las piezas y las transformaciones de movimiento que resultan de ellas. Lo mismo en estática y dinámica, será útil elegir ejercicios que sean de carácter práctico y relacionarlos con las realizaciones experimentales. Corrigiendo los trabajos escritos, que comprendan cálculos numéricos, el profesor deberá aprovechar todas las ocasiones para explicar a los alumnos los métodos de aproximación.

En cosmografía, convendrá no desarrollar los métodos de medida y observación que interesan al astrónomo de profesión, sino dar sobre todo nociones de astronomía física.

Una hora por semana por lo menos debe ser consagrada exclusivamente a los problemas, a las pruebas prácticas de cálculo, de geometría descriptiva, de mecánica y a los ejercicios sobre el curso. Todos los ejercicios deberán relacionarse rigurosamente con el programa; ningún desarrollo teórico nuevo deberá darse a própósito de un ejercicio.

CIRCULAR DIRIGIDA POR EL VICERECTOR DE LA ACADEMIA DE PARÍS A LOS INSPECTORES DE LA ACADEMIA, PROVISORES PRINCIPALES Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y DE FÍSICA. [1]

Los informes presentados al Consejo académico, en su sesión de verano, sobre la enseñanza de las ciencias matemáticas y de las ciencias físicas, contienen comprobaciones y observaciones que me parece útil llevar a conocimiento de los profesores.

(1) Esta circular fué dirigida el 1.° de Octubre de 1906.

Matemáticas — En las clases literarias, esta enseñanza es débil, muy débil. ¿Es imputable esta debilidad al escaso número de horas de que disponen los profesores? ¿Cierto desdén de parte de los alumnos, como ha sucedido en épocas anteriores, no entrará como factor de la causa? En este caso correspondería reaccionar a los profesores. ¿Les es imposible hacer comprender, por una juiciosa elección de ejemplos y de aplicaciones, de qué utilidad es, en la vida diaria, cierto conocimiento de los elementos de las matemáticas, aún para aquellos cuya actividad no tendrá necesidad de la ciencia como instrumento? ¿Es imposible, igualmente, sobre todo en filosofía, de hacer ver a sus alumnos, por medio de una enseñanza clara, bien despojada, reducida a lo esencial, de qué valor son esos elementos para la cultura más completa de los espíritus, que tienen en vista los programas de 1902? En esas clases, que no tienen concursos como finalidad, no sabría recomendar demasiado a los profesores de atenerse más al espíritu que a la letra de los programas, de que piensen que habrán llenado su tarea sí, de su enseñanza, sus alumnos llevan cierto número de nociones positivas, bien afirmadas, claramente comprendidas y adherentes a su espíritu.

En las clases científicas, completamente diferentes son sus resultados. Los cambios de puntos de vista y de métodos, inaugurados con los nuevos programas, empiezan a hacer sentir sus efectos, que son felices resultados.

En *Especiales*, según el informe del Inspector de Academia ponente, la situación es buena. De una manera general, no solamente ha acrecido el rol del análisis en vista de las aplicaciones prácticas, sino que se ha transformado el espíritu de la geometría analítica; se ha hecho más rara la intervención de las fórmulas generales y más frecuente el llamado a la iniciativa de los alumnos. Cierto es que las grandes teorías constituyen uno de los honores del espíritu humano, y la alegría de los que tienen la pasión de saber. Pero, para aquéllos, y son

los más numerosos, que necesitan ante todo desarrollar su capacidad de poder, que serán llamados, día a día, a resolver de la mejor manera posible, en el terreno de los intereses positivos, los problemas de la acción ¿cuál es la mejor preparación?: ¿la que aborda en lo posible, cada cuestión en si misma, o la que hace depender la solución de un problema, relativamente fácil, de una teoría demasiado poderosa para la mayoría de las jóvevenes inteligencias?

De una manera más particular, algunas iniciativas han parecido dignas de ser notadas y señaladas. Así, en un Liceo de París, un profesor ha renunciado a la división tradicional de los cursos de álgebra y de geometría analítica, y ha incorporado las aplicaciones geométricas al curso de análisis. En otro Liceo, la enseñanza de la geometría del espacio se ilustra con modelos de yeso y de alambre. Era el voto de la Comisión interministerial que ha preparado los programas de *Matemáticas Especiales*, que así se procediera siempre. Esta práctica cuyo valor ha sido demostrado por la experiencia, es muy de recomendarse.

La antigua clase de *Matemáticas Elementales* [1] ha sido transformada (en 1905) en *Especiales preparatorias*. Los resultados no han respondido a nuestras aspiraciones. Muchos alumnos, que voluntariamente hubieran hecho un año de Elementales superiores, se imaginaron que su interés estaba en entrar de rondón en una clase que prepara para el examen, y los efectivos de la nueva clase han sido sensiblemente inferiores a los de la clase que ella reemplazaba. Existe en eso un error contra el cual hay *que reaccionar:* los *profesores* manteniendo rigurosamente en esta clase el carácter que ella debe tener, y que claramente ha definido la instrucción del último año; los administradores demostrando a los alumnos y a sus familias que un año pasado en «Especiales preparatorias»,

(1) Se daba en 7.° año.

en iniciarse, con toda libertad, en los métodos, en las cuestionos generales, es para todos la mejor preparación a la clase de «Especialés» propiamente dicha, al espíritu y a los procedimientos de la ciencia, y con mucho el solo medio de evitar la sobrecarga, y el desarrollo de la caída.

Las clases de Matemáticas, antiguas Elementales, generalmente son buenas. Se estudia menos geometría que en el pasado, y más álgebra. Pero, se ha roto la barrera que antes limitaba el álgebra a las ecuaciones de segundo grado. Los buenos alumnos son ahora capaces de tratar los problemas de física que conducen a ecuaciones de tercer grado. Son estos resultados satisfactorios. Pero es preciso hacer constar que gran número de alumnos de esta clase, a pesar de su diploma de bachiller, no aportan un caudal suficiente de conocimientos. Es necesario volver sobre gran número de cuestiones, estudiar casi enteramente la trigonometría, cuando un repaso debiera bastar, asegurarse qué alumnos a los que va a enseñarse la dinámica, conocen suficientemente la cinemática. Es a los profesores de las clases anteriores, Primera y Segunda [1] que corresponde reaccionar contra este estado de cosas. Cuento con su consagración a sus alumnos, y con su entendimiento de los intereses de la enseñanza pública.

En las divisiones de Primera y Segunda [1], los efectivos son numerosos. Casi en todas partes se manifiestan quejas sobre su excesivo número. Muchos alumnos se engañan sobre sus gustos, sobre sus aptitudes, al salir del 1.er ciclo, y muy a la ligera ingresan en la vía científica, sin sospechar que entran en un callejón sin salida, y que en su término les esperan fracasos irreparables. Se que es una corriente contra la cual es difícil luchar, en una sociedad en la cual aumenta cada día la importancia de la industria. Sin embargo, nuestra misión, nuestro deber, es, en el instante decisivo de las opciones, in-

(1) 6.º y 5.º años.

formar en cuanto sea posible, a las familias sobre las aptitudes de sus hijos, y sobre las probabilidades de éxito que les espera en tal vía o en tal otra.

En el conjunto, las divisiones D parecen menos buenas que las divisiones C. El hábito de reflexionar y de razonar es en ellas menos firme: se da demasiado de memoria. Hago la indicación a los profesores de esas divisiones para que procuren provocar en sus alumnos un esfuerzo personal y sostenido de reflexión.

En lo que concierne a esas clases, observo en fin, que se han hecho con éxito ejercicios de agrimensura en diversos liceos y colegios de los departamentos. Tales prácticas merecen ser generalizadas.

Me ocuparé ahora de las clases del primer ciclo. La letra y el espíritu de los programas y de las instrucciones de 1905 no se observan lo bastante, en general. Ruego a los señores profesores que tengan en cuenta esos documentos, que se penetren bien de ellos, y que en su aplicación redoblen su ingeniosidad. Lo que se les pide, lo que ellos mismos habían solicitado, en gran número, es muy simple. Lo mismo que el primer contacto del niño con las cosas de la aritmética se hace por la experiencia, por el mecanismo de las operaciones y la resolución de problemas fáciles, no por el dogmatismo, la lógica pura, y la demostración de verdades abstractas, se ha pensado que ese mismo niño, por más que estuviera un poco más preparado, no podía interesarse en las cosas de la geometría, sino viéndolas salir y desprenderse poco a poco del estudio de las formas usuales y de la consideración de los movimientos familiares. Al provocar este cambio de método, nuestros profesores estaban de acuerdo con eminentes geómetras. Desde 1765, en el Prefacio de sus *Elementos de Geometría*, Clairaut pide que no se imponga a los principiantes la fatiga y el fastidio de un rigor inútil. En 1846 Jacobi decía: « El « rigor de las demostraciones geométricas es una inven- « ción de los griegos, que hace gran honor a la inteli-

« gencia humana; pero ese rigor no es una nutrición « sana y conveniente sino para jóvenes cuya inteligencia « tiene ya cierta madurez: solamente entonces la geo- « metría lógica es, como la gramática, una verdadera « educación de la inteligencia. »

Se trata pues de hacer intervenir la experiencia en la enseñanza de la geometría: de no echar de un salto, al niño en el mundo de lo abstracto. Ciertamente no debe prohibirse que se le levante un poco, pero, a condición que siempre pueda volver a tomar pie.

Son los profesores los que deben discernir, según las cuestiones tratadas, según la fuerza relativa de sus alumnos, en qué casos la sola experiencia basta, y en que otros debe ocurrirse al razonamiento. No hay enseñanza más difícil, que exija más atención de los profesores, más iniciativa, más inventiva, y aquellos que la desdeñaran, como inferior, sería por no darse cuenta de su utilidad y de su alcance.

Repito que se requiere mucha inventiva, y una inventiva que se adapte a las circunstancias. Así, las prescripciones detalladas tienen menos razón de ser aquí que en otros casos. Sin embargo, a título de indicación y de ejemplo, véase como se expresa el señor Inspector de Academia informante:

« Las instrucciones recomiendan, para la enseñanza de « la geometría, de hacer un llamado constante a la no- « ción de movimiento, y, en particular, de unir el para- « lelismo a la noción experimental de translación, el « estudio de las rectas y planos perpendiculares a la no- « ción de rotación. En lo que a mí respecta, véase como « comprendo las cosas. Tomemos por ejemplo la teoría « de las paralelas que es la que se ha discutido. Encuen- « tro excelente introducir esta noción por el deslizamiento « de una escuadra a lo largo de una regla, de hacerla « así familiar a los alumnos, de darles su sentido y la « posesión íntima; pero no creo que convenga fundar « sobre la idea de traslación la *definición* de las paralelas

« que se debe enseñar a los alumnos. Más tarde, en efecto, « cuando estudien la geometría lógica, fundarán el estu- « dio de la traslación sobre la definición euclídea de la « paralela, y me parece muy imprudente poner en un « joven cerebro, bajo la forma lapidaria de una defini- « ción, una idea que más tarde no podrá conservar ».

CIRCULAR DIRIGIDA POR EL VICE-RECTOR DE LA ACADEMIA DE PARÍS A LAS SEÑORAS DIRECTORAS Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE LOS LICEOS Y COLEGIOS DE SEÑORITAS DE SU DEPENDENCIA.

(París, 31 de Enero de 1907)

La experiencia ha demostrado que el empleo prematuro de la lógica pura en la enseñanza de la geometría no da buenos resultados para la gran mayoría de los alumnos. Los principiantes no comprenden nada de este rigor extremo que se ejercita en cuestiones sobre las cuales ellos tienen una intuición inmediata: se les ciega queriendo hacerle ver claro; se corre el riesgo de cerrarles, desde la entrada, el camino que se quisiera que recorrieran.

La mejor manera de iniciar a un niño en una ciencia es, por una parte, el tomar en cuenta lo que ya sabe, relacionar con sus ideas naturales las ideas más precisas que se le quiere dar; y por otra parte, conducirle lo más pronto, guiándole, a resolver cuestiones cuya natuleza le interese. Es el método que se sigue en la enseñanza de la aritmética, en la que un mínimo de teoría, ligada con la mayor frecuencia a nociones ya familiares al niño, se acompaña al principio de muchos ejercicios y problemas variados. El niño acepta voluntariamente las cortas explicaciones que es necesario darle, pues que ellas cuadran con los hábitos de su pensamiento, y también porque se le ofrece inmediatamente la ocasión de aplicarlas él mismo y de sacar así alguna cosa de su propio fondo, lo que para él constituye motivo de alegría.

La primera enseñanza de la geometría tendrá el mismo buen éxito que la de la aritmética, si se da con el mismo espíritu. Los profesores de los liceos de varones, por lo menos los que enseñan en los primeros años, ya han sido invitados por una circular de 27 de Julio 1905 [1] a recurrir a la experiencia en la expansión de los hechos geométricos, a admitir sin discusión todo lo que parezca evidente a sus alumnos, todo lo que una construcción baste para legitimar; es así que el alumno se da muy exacta cuenta de los casos de igualdad de los triángulos construyendo él mismo, con datos numéricos, triángulos de los cuales ciertos elementos, lados y ángulos, tienen valores determinados.

La misma circular recomienda el empleo sistemático de la noción de movimiento: demostración por giro, por rotación, todas las veces que sea posible: deslizamiento de una escuadra a lo largo de una regla, para preparar la definición euclídea de las paralelas, etc.—Parece, además, que el dibujo, así concebido, está destinado a desempeñar un importante rol en la enseñanza de la geometría: los alumnos deben ejecutar muy exactamente las construcciones, trazar por puntos lugares geométricos, comprobar, por medidas directas, la exactitud de los teoremas métricos.

Si tal manera de proceder ha podido recomendarse con justo título para los liceos de varones, no es dudoso que ella se impone con mayor razón para los liceos de señoritas. El hecho de que un gran número de alumnos de esos liceos, después de haber seguido el curso obligatorio de geometría en 3.er año, no sigan el de 4.o año, desde que se hace facultativo, atestigua claramente el escaso interés que encuentran en esa enseñanza. Por consiguiente los profesores encargados del curso de geometría deberán en lo futuro preocuparse mucho menos de exponer a sus alumnos teorías lógicas que de darles

(1) Véase pág. 540.

el sentido práctico y el conocimiento útil de las cosas de la geometría. Se considerará que el fin perseguido es alcanzado si los alumnos están en condiciones de hablar correctamente a propósito de las figuras, de efectuar construcciones exactas, de hacer, en caso necesario, algunas demostraciones de teoremas no evidentes, como por ejemplo, el teorema del ángulo inscripto. Así preparados, los alumnos que seguirán el curso del 4.º año podrán ejercitarse en las demostraciones lógicas con más probabilidades de éxito.

Como, a pesar de todo, una minoría por lo menos abandonará el curso de geometría después del 4.º año, es deseable que en ese año se den algunas nociones de geometría del espacio: podrán limitarse a una comprensión exacta y puramente experimental de los hechos de paralelismo y de perpendicularidad para las rectas y los planos, al enunciado de las reglas para la medida de los volúmenes, de las prismas y de las pirámides.

VII

INFORME SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS NUEVAS

(Por Frank Lombard, Profesor de Matemáticas en la Escuela des Roches)

Las más importantes de las Escuelas nuevas que dan, como los Liceos y Colegios, la enseñanza secundaria en Francia, son:

1.º La Escuela *des Roches*.

2.º La Escuela de *l'Ile-de-France* en Liancourt (Oise).

3.º El Colegio de Normandía, cerca de Ruan.

En este informe sólo nos ocuparemos de la Escuela *des Roches*. Hubiéramos deseado hablar de los programas y de los métodos seguidos por las otras dos Escuelas, pero las informaciones que se nos suministran son, en verdad, demasiado vagas.

La Escuela *des Roches* fué creada en 1899 por Edmundo Demolins. Comprende cinco edificios distintos.

Los 160 alumnos internos que cuenta el Establecimiento están repartidos en esos edificios y siguen los cursos comunes en un *Departamento de Clases*, situado poco más o menos equidistante de los cinco edificios.

Hasta la *Clase Cuarta* (3.er año), las clases son clases-estudios bajo la constante dirección del profesor: funcionan desde las 8 horas hasta mediodía, y de 4 h. 30 hasta 6 h. 50 (con recreos de 5, 10 o 20 minutos).

Para las clases superiores a la *Cuarta*, el trabajo personal del alumno se hace en estudio y todos los cursos funcionan de las 8 horas a las 12 horas 20 (salvo raras excepciones). Los cursos son de una hora (es la Escuela *des Roches* la que inauguró en Francia este régimen), salvo para cierto número de materias, en particular las matemáticas, cuyos cursos son de dos horas, con un simple descanso de cinco minutos.

Las tardes de 2 a 4, son exclusivamente dedicadas a los sports y a los trabajos manuales (modelado, carpintería, jardinería, etc.) y a los trabajos prácticos de ciencias (matemáticas, ciencias físicas y naturales).

Estimamos que la enseñanza científica no tiene valor, si no es completada con experiencias personales, con una práctica metódica y continua: damos gran importancia a esos trabajos de la tarde. Considerando el corto tiempo dedicado al estudio, podría llegarse a creer que se sacrifican las clases orales; si, en efecto, se compara nuestro horario con el de un Liceo, puede preguntarse dónde encontramos el tiempo para conciliar el estudio con el trabajo práctico y los sports. Y, sin embargo, podemos afirmar, con Carlo Bourlet (informe de Julio de 1907), después de una inspección, que los estudios hechos por un alumno de la Escuela son tan sólidos como los hechos por uno de sus compañeros de los liceos y colegios.

Se comprenderá mejor este juicio después de haber estudiado con nosotros la enseñanza de las matemáticas, tal como se da en nuestra Escuela actualmente.

Nos ocuparemos principalmente del primer ciclo: es en ese ciclo, en el cual ninguna idea de examen preocupa al profesor, que libremente puede darse curso a la iniciativa y al empleo de los nuevos métodos.

La Escuela des Roches, celosa de merecer su nombre de *Escuela Nueva* ha sido siempre una de las primeras en estudiar, y aún adoptar, los más recientes métodos de enseñanza; es así que no hemos esperado las circulares de 1905 para tratar de poner nuestra enseñanza de la geometría en armonía con las nuevas teorías.

En Julio de 1907, como acabamos de decir, Carlo Bourlet vino a inspeccionar nuestra escuela: se dió cuenta de que enseñamos la geometría según los métodos de Meray, y que tendemos a abandonar la geometría de Euclides.

Carlo Bourlet se mostró satisfecho de esa innovación, y dijo en su informe que los alumnos interrogados *habían comprendido perfectamente el mecanismo de los desplazamientos elementales, traslaciones y rotaciones que sirven de instrumentos en este modo nuevo de demostración.*

Sin embargo, con gran pesar, debemos declarar que los resultados no han respondido a nuestras esperanzas; la clase de Cuarta de 1907, que parecía prometer tantas esperanzas, como ha tenido que volver a los antiguos métodos, tuvo por lo menos que abandonar en parte los nuevos, y el profesor se ha visto obligado a orientar a los alumnos según la antigua dirección. Uno de los mejores alumnos nos decía con razón: « Con este género de « razonamientos, traslación, rotación, nunca se tiene la « seguridad de una demostración rigurosa ».

Sin embargo, no debe deducirse que hayamos vuelto a la antigua rutina y que nada nos importa el nuevo movimiento.

Estudiemos, pues, en detalle nuestros programas, nuestros métodos de enseñanza, y, desde luego, ocupémonos de la parte más importante y la más árida para los alumnos: la geometría.

En Quinta clase (2.º año), no seguimos estrictamente el programa oficial, y no comenzamos en esta clase el estudio metódico y lógico de la geometría.

Creemos que los jóvenes alumnos en su segundo año de estudios (Quinta) no tienen la inteligencia lo suficientemente desarrollada para aprovechar de un curso, aunque sea elemental, de geometría.

No obstante, desde la *Sexta clase* (1.er año), damos a nuestros alumnos una idea de la forma de los sólidos geométricos, los habituamos a que ellos mismos construyan con cartones algunos de esos sólidos. En *Quinta,* continuamos este estudio: todo un término se consagra a los trabajos prácticos de geometría (agrimensura, ejercicios sobre el terreno, etc.). En esas dos clases, nos servimos, entre otros libros, de la *geometría experimental* de Paul Bert.

Pero, sobre todo, acostumbramos a nuestros alumnos al razonamiento aritmético, que falta, con frecuencia, por no decir siempre, a los alumnos de las grandes clases. En *Cuarta*, y sobre todo en *Tercera,* los alumnos toman con demasiada frecuencia, la mala costumbre de traducir todo por ecuaciones, que rara vez tratan de interpretar. Podemos citar tal clase de *Tercera,* en la cual ningún alumno puede resolver por aritmética el problema clásico siguiente: «Un padre tiene 42 años, su hijo 12: ¿dentro de cuántos años la edad del padre será triple de la edad del hijo?»; y todos, aún el más débil de la clase, supieron resolverlo por álgebra. ¿Es culpa de ellos? No nos parece. Los programas de 1905 dan escaso sitio a la aritmética en Quinta y en Cuarta. (1)

En Sexta y en Quinta, nuestra enseñanza es, pues, concreta y puramente práctica; así preparados, nuestros jóvenes se encuentran aptos para abordar el programa de la *Cuarta clase.*

En las clases del primer ciclo, nuestro método de en-

(1) Es decir en 2.º y 3.er año. ¿Qué hubiera pensado este profesor de nuestros programas, que hasta hace un año, sólo exigían la aritmética en primer año?

señanza, del punto de vista de la geometría, es el siguiente:

El profesor enuncia un teorema teniendo cuidado de que los alumnos hagan la distinción entre la hipótesis y la conclusión. Un alumno escribe ese enunciado en el pizarrón subrayando de manera diferente la hipótesis y la conclusión; bajo la dirección del profesor, que se contenta con orientar las investigaciones, los alumnos se esfuerzan en encontrar la demostración. Todo teorema es, pues, propuesto a nuestros alumnos como un problema del cual ellos deben encontrar la solución. Cada alumno trabaja sobre un cuaderno de fichas; obtenemos así una clase vivaz, no la clase en que los alumnos contestan todo de memoria, sin discernimiento, sino la clase en que todos, profesores y alumnos se interesan en el problema propuesto. De este pequeño torneo de ideas resulta casi siempre la demostración que el profesor ajusta en seguida, y que los alumnos anotan en su cuaderno de clase. Un teorema así demostrado, así analizado se graba profundamente en la mente de nuestros alumnos.

Hemos adoptado como texto la geometría de Niewenglowski, pero nos separamos del plan del autor tratando desde el principio los casos de igualdad de los triángulos, aun los de igualdad de los triángulos rectángulos.

Este orden nos permite dar, desde el primer término, numerosos problemas; reconocemos que es bastante difícil hacer comprender esos casos de igualdad a jóvenes inteligencias recién formadas al razonamiento geométrico, pero podemos afirmar que lo logramos con bastante éxito.

M. Maluski, ex profesor de Matemáticas Especiales del liceo de Versalles, y actualmente provisor del liceo de Chaumont, que ha venido a inspeccionar nuestras clases, se ha sorprendido al encontrar que en la *Clase Cuarta* (3.er año) nuestros alumnos tratan sin gran dificultad pequeños problemas de geometría. Creemos con él que si los alumnos no resuelven desde el principio problemas, sólo imperfectamente comprenden la geometría.

Exponemos en seguida la simetría antes de la teoría de las paralelas; para el desplazamiento de las figuras, tratamos al principio la traslación solamente, dejando la rotación para el fin del año.

En suma, el programa de la *Cuarta clase* está constituído por el 1.º y el 2.º libro de geometría. Este programa nos parece ampliamente suficiente, por otra parte: poco importa ir ligero en geometría; nuestro principio es de no pasar de un teorema al siguiente, sin que el primero haya sido comprendido por toda la clase, y no titubeamos en volver a empezar dos o tres veces la misma lección si notamos algunas lagunas.

Creemos que hay ventaja en hacer descubrir al alumno una propiedad antes de demostrársela, y es por eso que siempre proponemos como deber un teorema a investigar: despertamos así el amor propio de nuestros jóvenes y siempre es esa la cuestión que primeramente tratan.

La corrección de todos los deberes se hace en el pizarrón y los deberes cuya nota es inferior a 10 son nuevamente hechos por escrito; no tememos el hacer recomenzar muchas veces el mismo problema; obrando así, no desalentamos a nuestros alumnos, al contrario, les creamos el gusto de la geometría, a un punto tal, que muchos de ellos aceptan de muy buen grado los problemas de geometría que les damos como deberes de vacaciones.

Al fin de la Cuarta clase, no solamente han aprendido nuestros jóvenes a razonar por sí mismos, sino que además están en posesión de los elementos fundamentales de la geometría, y, además, han adquirido el gusto de la investigación personal.

Es sobre todo esta adquisición la que constituye nuestro objetivo en esa clase, la más interesante para el profesor, pues es en ese momento que se despiertan jóvenes inteligencias científicas; y creemos que es de la Cuarta clase (3.er año) que depende en gran parte el porvenir científico de un alumno.

En *Tercera,* nuestro método permanece el mismo: exponemos el 3.er libro, pero sin insistir sobre el cálculo de π y sobre las relaciones métricas que constituyen más bien un ejercicio de cálculo algebraico que un razonamiento geométrico.

Tratamos también el 4.o libro y recorremos toda la geometría del espacio (planos, planos y rectas paralelos, planos y rectas perpendiculares, ángulos diedros, triedros, poliedros, prismas, paralelepípedo, pirámides y cuerpos redondos).

Para este último estudio, utilizamos sólidos de los cuales una parte ha sido hecha por los mismos alumnos en los talleres de carpintería de la Escuela.

A este estudio abstracto agregamos la evaluación de las áreas y de los volúmenes de los cuerpos redondos, lo que nos suministra temas para numerosos problemas de álgebra (2.o grado), y así, correlacionamos la geometría y el álgebra.

Para este primer ciclo, todos nuestros alumnos se reunen en una misma clase: no tenemos divisiones en sección A y sección B; para todos rige el mismo programa. Nuestras clases de Quinta, de Cuarta y de Tercera, ciertamente están divididas cada una en dos series; pero es esto una cuestión de número. Cada uno de esos grupos, comprende de 12 a 15 alumnos que, en matemáticas, funcionan a razón de cuatro horas semanales de clase.

Para el 2.o ciclo, nos limitaremos a decir que seguimos los programas de los exámenes, lo que, por otra parte, no nos impide, tener más en vista la formación de nuestros alumnos que su preparación exclusiva para el bachillerato.

En Segunda clase, nuestros alumnos están todavía divididos en dos cursos, pero de una manera constante y cualquiera que sea el número de alumnos de la clase. Esos dos cursos tienen cinco horas de matemáticas por semana.

1.o El primer curso comprende todos los mejores alum-

nos de la clase: en él se encuentra siempre, con los futuros C y D, algunos alumnos que pasarán el año siguiente a 1.ª B. Pero, por lo menos, han podido alcanzar hasta la clase de Primera para escoger su vía y nunca lamentarán el haber recibido esta formación matemática más completa. Con frecuencia, ella les permitirá elegir después del bachillerato, una escuela técnica para la cual el programa de B hubiera sido una preparación netamente insuficiente.

Contrariamente a los programas oficiales, en este primer curso, tratamos completamente la trigonometría. Sólo nos ocupamos de los arcos comprendidos entre 0 y 2 π y nuestro objeto es la resolución de los triángulos. Hemos observado en efecto, que nuestros alumnos de Primera tenían dificultad para resolver convenientemente un problema de bachillerato si no estaban familiarizados con los cálculos trigonométricos; pero, los programas de Primera están tan recargados que, con frecuencia, esta rama tan importante se sacrifica o, por lo menos, se trata demasiado rápidamente. Con nuestro método, desde el mes de Mayo, los alumnos de Segunda tratan y discuten problemas del bachillerato, y en Primera sólo tienen que perfeccionarse y generalizar las fórmulas que ya han dado.

2.º El segundo curso, menos numeroso, está compuesto de alumnos más débiles, que necesitan ser observados, seguidos y formados con más cuidado que los primeros. Este curso, como máximo, es de 6 o 7 alumnos; el profesor trata de hacer concordar el programa de estudios con el de su colega del primer curso, pero da menos desarrollo a las partes difíciles teniendo siempre presente que los alumnos que se le han confiado no se destinan a un bachillerato científico, pero que serán en lo futuro o alumnos de Primera B o futuros alumnos de la «Sección Especial», de la cual diremos algunas palabras más adelante.

Es por lo que da una parte preponderante a las repre-

sentaciones gráficas. Este año en particular los alumnos se han interesado en las gráficas de los ferrocarriles, en la gráfica del barómetro registrador que contraloreaban con el de la Escuela.

En el segundo ciclo, el Profesor no hace curso: completa por notas el texto seguido en las partes imperfectamente tratadas en el primer ciclo: sin embargo, puede, sobre ciertos temas, hacer aprovechar a los alumnos sus investigaciones personales: este año la simetría en el espacio ha sido tema de varias lecciones en Primera.

En Primera C y D, nuestros alumnos tienen 7 horas de clases de Matemáticas por semana.

En Primera B, tienen 2 horas de Matemáticas, pero, como el programa está mal definido, se deja completa libertad al Profesor que, según las capacidades de los alumnos, dirige su curso en tal o cual dirección. Por otra parte, los alumnos de esta clase, habiendo, como ya hemos dicho, seguido los cursos comunes de Segunda, han estudiado ya todo el programa y sólo les resta completarlos en Primera B.

En la clase de Matemáticas, como en Primera, seguimos los programas, damos un sitio importante a las cónicas, considerando aparte la hipérbola. La teoría de los errores es también tema de varias lecciones.

En Filosofía, damos algunos complementos siguiendo el curso de Porchon, y, para la Cosmografía, seguimos el programa oficial.

En resumen, nos esforzamos en dar a nuestros alumnos una base experimental sólida y el gusto de la investigación personal. Solamente en Segundo aparece, vaga todavía, la perspectiva del bachillerato. Ella se nos impone verdaderamente sólo en las clases que deben exanimarse.

Estudiemos ahora las otras ramas de las Matemáticas.

En Cuarta, tratamos cuestiones de Aritmética teórica, insistiendo sobre todo en los principios elementales relativos a la sustracción, pareciéndonos este estudio como una preparación, una introducción natural al Álgebra. De

la multiplicación hacemos derivar los cálculos de las potencias; para la división, no insistimos sobre la teoría.

Tratamos los principales caracteres de divisibilidad necesarios para la simplificación de las fracciones y encaramos estas últimas haciéndolas derivar de la medida de las longitudes.

Para los números primos, no exponemos ninguna teoría: insistimos sobre la reducción de las fracciones al mismo denominador por el método del mínimo común múltiplo.

Una vez bien comprendidos esos principios de Aritmética, empezamos entonces, y sólo entonces, el estudio del Álgebra.

Por otra parte, nuestro programa es bastante restringido: Cálculo de los números algebraicos, ecuaciones de primer grado, y problemas simples que a ellas conducen.

En Tercera, abordamos la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado (numéricas y literales) insistiendo sobre todo, sobre el método de sustitución, el más lógico, en nuestra opinión. Tratamos numerosos problemas esforzándonos en hacer interpretar las soluciones negativas y habituando a los alumnos al empleo de las fórmulas.

Para el segundo grado, resolvemos desde luego numerosas ecuaciones numéricas por el método de descomposición en cuadrados; sólo después que todos nuestros alumnos se han familiarizado con esas ecuaciones es que abordamos la discusión completa de:

$$a x^2 + b x + c = o$$

En fin, proponemos pequeñas aplicaciones de segundo grado (signo de las raíces, ecuaciones que admitan x' y x'' como raíces, relaciones entre los coeficientes y las raíces, etc.).

Por último, nos ocupamos de la representación gráfica de las funciones:

$$y = ax + b \quad e \quad y = ax^{r} + bx + c$$

y terminamos por el estudio de los logaritmos.

Tal es, en su conjunto el programa de matemáticas estudiado en la Escuela des Roches en lo que se refiere a las clases paralelas a las de los Liceos y Colegios.

Los alumnos que no se destinan al bachillerato y a las escuelas que lo exigen, pero que al salir de la Escuela des Roches desean entrar en el comercio, la industria, o la agricultura, siguen las cursos en su *Sección especial*, los cuales duran dos años.

A los alumnos de Primer Año que hayan obtenido una calificación media suficiente, les damos un certificado, y a los de Segundo año un diploma.

Este diploma, otorgado después de un examen que se da ante examinadores que no forman parte del personal enseñante de la Escuela, dispensa del concurso de ingreso en los siguientes Establecimientos: Escuelas de Comercio del Havre y de Nancy, la Escuela de Arquitectura de Trélat, la Escuela de Hilandería de Mulhouse y Escuelas de Agricultura de Gemblaux y de Fribourg.

Por otra parte, son esas las únicas Escuelas ante las cuales hayamos hecho gestiones.

La *Sección especial* tiene una prolongación en Londres en la F. C. C. (Formación para las carreras contemporáneas), en la que algunos de nuestros alumnos reciben, durante dos años, la notable dirección de M. Jean Périer, Ataché comercial de la Embajada de Francia.

El profesor de Matemáticas, como sus colegas de la Sección especial, se esfuerza en dar una enseñanza ante todo práctica y, por ejemplo, los alumnos hacen un uso constante de la regla de cálculo. En aritmética, trata las cuestiones de interés (partes alícuotas), las medidas y pesas extranjeras.

Se da un sitio importante a la Contabilidad, pero corresponde a la mecánica, ilustrada con numerosos croquis acotados, un lugar preponderante.

Los alumnos de la clase Especial han seguido por lo menos hasta la Tercera los cursos ordinarios; sólo tienen que repasar los programas de esos cursos completándolos con dibujos y cálculos numéricos.

Para terminar, diremos algunas palabras de las lecciones de ensayo o *Probestunden* que se dan en la Escuela des Roches desde el año escolar 1906-1907 y que han dado excelentes resultados.

Es de las *Escuelas nuevas* de Alemania (Landerziehungsheime del doctor Lietz) que M. G. Bertier, director de la Escuela des Roches, ha tomado esta innovación.

Por turno, cada uno de nosotros da su clase ante sus colegas. Concluída la clase, hablamos de los métodos de enseñanza, tomando como punto de partida la clase que acaba de darse. El Director hace un resumen de las opiniones y expone las suyas.

Esta institución es muy importante, pues permite tener en la Escuela des Roches una unidad de enseñanza, unidad indispensable sobre todo en Matemáticas; permite también que los jóvenes profesores aprovechen la experiencia y los ensayos de los colegas más antiguos de la Escuela.

No tenemos la pretensión de enaltecer nuestra manera de enseñar considerándola como perfecta e infalible. Por lo contrario, creemos que tanto vale el maestro tanto vale el método. Tal procedimiento defectuoso empleado por un profesor experto y de conciencia puede dar excelentes resultados, lo mismo que un buen método puede muy bien no darlos si es aplicado por personas inexpertas.

Pero lo que no tememos afirmar, es que nuestros métodos nos han dado resultados satisfactorios, tanto en lo que se refiere al éxito de los exámenes como del punto de vista del entrenamiento práctico de las jóvenes inteligencias.

Los apreciamos, pues, y nos permitimos recomendarlos, con la reserva y la modestia que nuestra joven expe-

riencia comporta. Por otra parte, estamos resueltos a perfeccionarlos sin cesar y seríamos felices que nuestra exposición permitiera a nuestros colegas de los liceos y colegios hacernos algunas críticas, sugerirnos progresos, hacer todavía más útil nuestra obra de vanguardia.

VIII

LA PENETRACIÓN RECÍPROCA DE LAS MATEMÁTICAS PURAS Y DE LAS MATEMÁTICAS APLICADAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA.

(Conferencia de Carlo Bourlet en la reunión de la Comisión internacional de la enseñanza matemática realizada en Bruselas en 1910)

La enseñanza de las matemáticas en nuestros liceos, colegios y gimnasios de todos los países, pasa actualmente por lo que algunos llaman una crisis que, en suma, no es más que una fiebre de crecimiento, un malestar nacido de la misma rapidez de la evolución del saber humano.

Debido a una labor formidable, el siglo XIX, siglo sin igual en la historia del mundo, nos ha legado un tesoro de materiales científicos que se han acumulado con una rapidez y una abundancia no imaginadas. Bruscamente los profesores se encontraron colocados ante este doble problema por resolver: no solamente adquirir ellos mismos los nuevos conocimientos a medida de su aparición, sino también hacerlos penetrar en su enseñanza. Mientras que los límites de las ciencias retroceden más y más lejos, el número de horas de que disponemos, para enseñar a la juventud de nuestras escuelas, desgraciadamente permanece invariable: es necesario podar, simplificar la enseñanza antigua para dar lugar a la enseñanza nueva. Tal materia que, hace 20 años, sólo se profesaba en la Universidad, debe actualmente descender a la escuela secundaria. Para que los hijos puedan ir más adelante que

sus padres, es preciso que rectifiquemos para ellos el camino que conduce a las fronteras de nuestros conocimientos actuales.

Una enseñanza moderna no podría contentarse con cultivar las facultades del espíritu, debe saber amueblarlo con hechos, numerosos y precisos. No tenemos que formar filósofos que vivan como sabios hermitaños, sino hombres de acción que deberán contribuir, por su parte, al progreso humano. Y véase porque ya no nos es permitido presentar a nuestros alumnos la ciencia matemática bajo un aspecto puramente especulativo y que, cueste lo que cueste, necesitamos esforzarnos en adaptar las abstracciones matemáticas a las necesidades de la realidad, más para prestar servicio a la sociedad en su conjunto, que a cada uno de nuestros estudiantes en particular.

Eso, por otra parte, no es más que un justo retorno, pues, si es verdad que las matemáticas son indispensables a las ciencias aplicadas, no podríamos dejar de reconocer que es en la Naturaleza que han encontrado sus más fecundos manantiales. Que las matemáticas sean deudoras a la observación de los elementos mismos que las constituyen, que los más bellos problemas hayan nacido en el estudio de los fenómenos del mundo físico, eso no ofrece duda a nadie; sin embargo, debemos declararlo, con frecuencia hemos tenido la tentación de olvidarlo.

La noción experimental de colecciones de objetos distintos, de su asociación, de su repetición, de su repartición, nos ha suministrado la de número y de sus operaciones elementales. Las formas de la naturaleza, idealizadas, regularizadas por nuestra imaginación, nos han conducido a concebir esas figuras irreales que encara la geometría. Los movimientos que ejecutamos nosotros mismos, o los que vemos realizar bajo nuestros ojos nos han hecho comprender la posibilidad de aproximar, de comparar, de ensamblar esas figuras. Así, sobre esas bases de observación, las matemáticas, por la sola fuerza de un razonamiento lógico, han construído un inmenso edificio.

Poco a poco, alejándose más y más de ese origen experimental, lo ha perdido de vista, o, lo que es más grave, con frecuencia *ha querido* perderlo de vista; ha ensayado disfrazarlo bajo un aparato verbal, creyendo así haber desprendido su ciencia de todos los lazos materiales que la hacían real.

Era eso, señores, me atrevo a decirlo, una manifestación nefasta del orgullo humano. Es por haber querido sacar todo de sí mismo, es por haberse considerado como un dios omnisciente que se basta, es por haberse aislado en medio del universo en movimiento, que el hombre, durante siglos, ha permanecido en tan grande ignorancia de las leyes naturales. Y, en esta noche oscura del pasado, los únicos nombres que brillan son los de los Ptolomeos, de los Arquímedes, de esos genios, precursores que siempre alimentaron su inspiración en los manantiales inagotables de la Naturaleza.

Los grandes matemáticos de nuestros días felizmente han reanudado esa tradición, y, por la diversidad de los dominios que abordan, nos dan el ejemplo que debemos seguir. Mientras que los unos dan flexibilidad al cálculo para ponerlo al servicio de las ciencias experimentales, los otros vuelven a tomar pacientemente el estudio filosófico de los principios mismos de nuestra ciencia y nos hacen conocer la verdad de las pretensiones de los que han creído o que creen quizá todavía, poder separarla de la materia.

Hablando de la noción ordinal de los números enteros, considerados como símbolos deducidos los unos de los otros por reglas impuestas a priori, es posible construir una Matemática puramente simbólica que formalmente concuerda con la que hemos sacado de la observación. Esta concordancia, que no es fortuita, la hemos querido; pero ¿basta ella para que legítimamente podamos afirmar que así hemos librado nuestra ciencia de la experiencia? ¿Con qué derecho indentificaremos esos símbolos ordinales, creados arbitrariamente, con esas entidades cardinales na-

turales que son los números enteros? ¿En qué medida las ecuaciones, a las cuales hemos dado los nombres de figuras geométricas, representan realmente los objetos materiales que la experiencia nos ha permitido concebir? Son otras tantas cuestiones que, cuando se han resuelto, precisan y denominan los datos experimentales que se encuentran en la base de las matemáticas.

Así, señores, dos corrientes, una partiendo de la observación, la otra del simbolismo puro, converjen ambas al mismo punto. Una y otra nos han dado una idea más justa de lo que es nuestra ciencia, de lo que puede ser y del empleo que de ella debe hacerse. Esas dos tendencias, la primera dirigida hacia la aplicación, la segunda hacia la abstracción, no son contradictorias, sino en apariencia; quisiera convenceros de la armonía posible y deseable entre esas dos tendencias.

Analicemos pues la cuestión.

Hay un primer punto, al cual he hecho alusión hace un momento, sobre el que existe perfecto acuerdo; es la necesidad de armonizar nuestra enseñanza con las exigencias de la vida.

La industria, hija de la ciencia del siglo XIX, reina actualmente como dueña en el mundo; ella ha transformado todos los antiguos procedimientos, ella ha absorbido en si misma casi toda la actividad humana: el pobre campesino que se sirve de máquinas agrícolas y de abonos químicos, él mismo no escapa a su omnipotencia. Nuestro deber imperioso es, pues, el preparar los jóvenes cuya educación se nos ha confiado, a conocer, a practicar y a hacer progresar las ciencias experimentales en las que esa industria alimenta sus fuerzas.

La conclusión que de ello se desprende es ineludible: en nuestras clases secundarias, el profesor de matemáticas, cuidadoso, no de *adornar* las inteligencias de sus alumnos, pero sí de prestar servicio a su raza y a la

humanidad, debe descartar resueltamente de su enseñanza todo lo que no tendrá una utilidad más o menos directa en las aplicaciones.

Esto define un programa y limita las materias.

Sé perfectamente que algunos espíritus mal encaminados o rutinarios deploran la desaparición de ciertas cuestiones de lujo, sin utilidad práctica, y a las cuales atribuyen un exagerado valor educativo. Desde que se ha hecho un cuadro completo de los conocimientos matemáticos estrictamente indispensables para un ingeniero ordinario, desde luego se observó que el campo así limitado es todavía inmenso.

La obligación de no cargar a nuestros alumnos con un bagage inútil y embarazoso, facilitarles la adquisición de conocimientos prácticos que les permitirán recorrer su camino en la vida, nos traza el programa de las materias que debemos enseñarles. Es ese el primer punto a propósito del cual, en general, hemos sabido ponernos de acuerdo.

¿Cómo enseñarles esas materias, así definidas? ¿Qué procedimientos, qué medios pedagógicos debemos preconizar?

Aquí, es menos fácil entendernos, y necesito señalar una enojosa confusión que desgraciadamente se produce con frecuencia, por lo menos entre nosotros en Francia, aún en el espíritu de hombres de gran talento.

Desde que fué establecido que la enseñanza de las matemáticas tal como había evolucionado en nuestras escuelas secundarias, era poco apropiada como preparación para el estudio de las ciencias aplicadas, algunos reformadores urgidos e irreflexivos acusaron en seguida a los *métodos*. Habiendo adquirido en su juventud una cierta suma de conocimientos matemáticos, su espíritu rehusó de inmediato admitir que cualquiera de esos conocimientos, adquiridos a veces a costa de grandes esfuerzos, pudieran ser relegados al rango de los objetos sin empleo. Mientras que, ante todo, se necesitaba, podar los

programas, suprimir las partes inútiles en la práctica, introducir partes nuevas indispensables, ellos se ingeniaron únicamente en preparar los antiguos platos con una nueva salsa! ¡y qué salsa, gran Dios!

Hemos visto algunos, que para facilitar la llamada adquisición de la aritmética, con una ingeniosidad digna de mejor suerte, han inventado los más complicados aparatos para explicar las cosas más sencillas. Algunos hemos visto que, habiendo establecido como principio que en todas las cosas el ejemplo particular debe siempre preceder a la teoría general llevan al exceso este principio excelente en sí mismo, exponen la teoría de los determinantes por aproximaciones sucesivas conduciendo a los alumnos al través del dédalo temible de las fórmulas generales de resolución de las ecuaciones de primer grado, con dos, tres o cuatro incógnitas, resueltas por el método de sustitución. Otros hemos visto que, bajo el pretexto de renovar la enseñanza de la geometría, se han contentado con suprimir en ella, al acaso, algunas demostraciones para reemplazarlas por una vaga explicación o una experiencia de carpintería.

Y, en el fondo, era siempre la misma aritmética, la misma álgebra, la misma geometría que se enseñaba, y con el mismo espíritu. Los alumnos aprendían siempre que *la serie de los números primos es ilimitada*, solamente que habían dejado de saber la razón. La unidad en el método, el rigor en la demostración, esas cualidades esenciales de una enseñanza matemática, se habían oscurecido en ese caso.

¿Quiere esto decir, sin embargo, que después de revisado con cuidado nuestro programa, no haya motivo de renovar los métodos de enseñanza? No, ciertamente; pero esta renovación, si es útil y aun necesaria, debe, en mi opinión, ofrecer otro carácter que aquel de que acabo de hablar.

Ante todo, una modificación pedagógica cualquiera no podría limitarse solamente a una parte de nuestra ense-

ñanza, con el riesgo de romper su unidad y su continuidad. Si, por ejemplo, transformamos el modo de exposición de la geometría, sería perjudicial no hacer ese cambio más que en las clases inferiores, como se ha propuesto, dejando subsistente en las elevadas los antiguos procedimientos. No es preciso que lo que actualmente es un axioma se transforme en una verdad demostrable, e inversamente. Toda transformación en nuestros métodos debe realizarse a la vez sobre el conjunto de las clases cuyo programa comprende la enseñanza modificada.

Llenada esta condición esencial, fácil nos será encontrar una guía segura para hacer nuestra elección entre los diversos medios de que disponemos, pues nos bastará recordar continuamente el fin que perseguimos. Un mismo hecho matemático puede ser demostrado, presentado de diversas maneras; pero, entre esos diferentes procedimientos, los unos son elegantes artificios y los otros medios naturales, los unos están desligados de toda representación concreta, y los otros, aunque no menos rigurosos, tienen una imagen tangible; los unos son susceptibles de extensiones y de generalizaciones y los otros están limitados a su propia esfera de acción, los unos abren amplios horizontes a las jóvenes inteligencias y los preparan para conocimientos ulteriores y los otros no sugieren ninguna nueva idea. ¿Es necesario decir cuál es el que tendrá nuestra preferencia? Será el que siga la vía más natural, el que sea más tangible, el más general y el más fecundo.

Es con ese espíritu, señores, que desde hace muchos años luchamos pacientemente por el rejuvenecimiento de nuestra enseñanza secundaria en Francia; es también con ese espíritu que os propongo examinarla ahora en detalle.

Los programas de matemáticas en nuestros liceos y gimnasios comprenden, por una parte la aritmética y el álgebra y por otra parte la geometría y la trigonometría. Podría agregarse a veces la mecánica, pues en algunos

países esa enseñanza está a cargo de los profesores de matemáticas, mientras que en otros, y no sin razón, está confiada a los profesores de física.

Las antiguas barreras ficticias que se habían elevado entre la aritmética y el álgebra felizmente han desaparecido, al mismo tiempo que las que separaban el álgebra y el análisis. Ha pasado el tiempo en que se proscribía el empleo de las letras en aritmética y en que, bajo pretexto de simplicidad, se forzaba a los alumnos a esa terrible gimnasia intelectual que consiste en traducir en lenguaje vulgar todo lo que está condensado en una ecuación. Desde hace veinte años la enseñanza de la aritmética y del álgebra ha hecho en nuestras escuelas francesas admirables progresos, debidos únicamente a las necesidades de su adaptación a las ciencias aplicadas.

Resumamos y ensayemos notar de paso las mejoras posibles y deseables.

En todo el programa de nuestras clases secundarias no hay partes más delicadas que las teorías de la aritmética. Por un extraño y desconcertante contraste, son precisamente esas cuatro operaciones, rudimentos indispensables que constituyen la base de los conocimientos matemáticos, son las fracciones ordinarias y decimales y todo su cortejo, cuya teoría es la que en nuestra enseñanza elemental presenta mayor dificultad. Para comprender bien las demostraciones sintéticas, se necesita un espíritu que tenga cierta madurez. Así, después de algún tiempo, se ha entrado en la vía racional, que consiste en no hacer estudiar a los niños más que el mecanismo del cálculo, y llevar al fin la exposición de esas teorías, después del estudio elemental del álgebra.

Nosotros mismos hemos sido bastante atrevidos en ese apartado feliz. ¿Por qué fatigar los cerebros de niños de diez a trece años con variaciones sin fin sobre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, con proposiciones muy elegantes, pero perfectamente inutilizables en la práctica, sobre los números primos y las fracciones

decimales periódicas? Que nuestros alumnos aprendan las operaciones fundamentales del cálculo de los números enteros, decimales y fraccionarios, que sepan manejar imperturbablemente el sistema métrico, y el profesor encontrará en los problemas de práctica corriente materia suficiente para ejercitar un razonamiento. ¿Para qué les servirá a noventa y nueve alumnos sobre cien el saber que la descomposición de un número entero en factores primos sólo es posible de una sola manera? y aún el saber reducir una fracción a su más simple expresión?

Se podría contar con los dedos los casos prácticos excepcionales en que tales conocimientos pueden ser utilizados, como por ejemplo en el problema de elegir un tren de engranages necesario para ejecutar en un torno paralelo un tornillo de paso dado. ¿No sería más infinitamente aprovechable para el joven estudiante poseer, en lugar de ese pedantesco bagaje, nociones prácticas de álgebra y de geometría que, además, tendrán la inapreciable ventaja de interesarle? No desespero, señores, de que muy pronto todas esas teorías sobre los divisores y los números primos serán difinitivamente relegadas a la última de las clases de la sección científica de nuestras escuelas secundarias.

Casi todos hemos conocido el tiempo en que el álgebra ocupaba el sitio reducido y elevado que yo quisiera ver reservado actualmente al máxímo común divisor y a la criba de Eratóstenes. Hemos asistido a su descenso, por grados sucesivos, en todas las clases superiores de nuestros establecimientos. Fué al principio el tímido empleo de las letras en aritmética, la introducción de las ecuaciones de primer grado que vino al fin a desterrar los barrocos procedimientos, los *truks* aritméticos dignos de la escolástica de la edad media. Al mismo tiempo los alumnos de la clase de Matemáticas Elementales, la más elevada clase científica en nuestros liceos, recibían algunas nociones — ¡cuán reducidas e imperfectas! — sobre la variación de las funciones simples.

Recuerdo que en 1895, hace quince años, tuve el insigne atrevimiento —que sólo era excusable por mis pocos años— de escribir para los candidatos del bachillerato en ciencias *Lecciones de álgebra* que entonces eran revolucionarias. No sólo había iniciado mi obra con la exposición directa de los números negativos con ejemplos concretos escogidos en las aplicaciones usuales, no sólo había sembrado del principio al fin del volumen la noción de función y de su representación gráfica, sino que tuve la audacia inaudita de hablar de límites, de continuidad y de derivadas. Si mi eminente maestro Gastón Darboux, decano entonces de la Facultad de Ciencias de París, no hubiera tenido la bondad de patrocinar mi obra y de cubrirla con su alta autoridad, verosimilmente hubiera sido bastante maltratada por grandes críticas en aquellos tiempos. Ahora, hace un año, mi editor me rogaba con insistencia que hiciera una revisión de ese libro y, en apoyo de su pedido me enviaba diversas cartas de jóvenes profesores que decían: «el Álgebra de Bourlet es todavía — *todavía* — un buen libro, pero ha *envejecido*»! Y estoy seguro que esos jóvenes colegas, que no me conocían, se imaginaban que el autor de ese libro es un viejo cubierto de canas. Si me permito citar este ejemplo personal, no es por prurito de vanidad, sinó únicamente para comprobar, con alegría, la rapidez con que, por lo menos en ese dominio, ha progresado en Francia nuestra enseñanza. Por otra parte, los promotores de ese progreso no somos ni yo ni ninguno de los numerosos autores que han seguido el mismo camino que he tomado: es la necesidad misma, es la influencia dominante de las ciencias aplicadas de las cuales no hemos sido más que los primeros servidores.

La noción de función es la base de todo estudio de los fenómenos naturales. Desde el día en que la enseñanza de la física y de la mecánica abandonó la Universidad para penetrar en la enseñanza secundaria, implícitamente fué decretado que los rudimentos de la teoría de las funciones deberían acompañarla. Cuando hace quince años,—

por otra parte después de haber hecho el ensayo en mis alumnos,—afirmaba que los candidatos al bachillerato aprenderían sin dificultad el cálculo de las derivadas, cuando reclamaba la supresión de las especulaciones inútiles y la introducción de todo lo que sirve en la aplicación, muchos *sabios* de entonces elevaron sus brazos al cielo. Ahora, nuestros futuros bachilleres aprenden la notación diferencial y hacen ya algunas cuadraturas; y nuestros alumnos de Primera y de Segunda de la Sección Científica manejan con soltura las derivadas.

Un progreso es tanto más fácil de realizar cuanto menos choque con ningún hábito adquirido. Si en menos de veinte años, hemos podido dar tan amplio sitio al Algebra y al Análisis, es que el campo estaba libre. En aritmética, hemos sido menos felices, pues se trataba de modificar un estado de cosas muy antiguo y de decidir al cuerpo de profesores, no a introducir materias nuevas, lo que es bastante fácil, sino a dar amplios cortes en lo que, hasta entonces, tenían la costumbre de considerar como el A B C fundamental de su enseñanza.

Peor todavía es en geometría.

Durante siglos, generaciones sucesivas de matemáticos han estudiado, completado, perfeccionado la que fué planeada por Euclides; y poco a poco la obra del sabio griego tomó esa forma definitiva que, parece, asegura la perennidad. Sin embargo, cuando, llevados por la necesidad, hemos querido iniciar en esta ciencia a niños de once a doce años, cuando sobre todo hemos querido enseñarles una geometría práctica que se adapte a aplicaciones inmediatas al dibujo, a la mecánica, a las artes industriales, hemos necesitado comprobar que el método rígido y dogmático de Euclides carecía de la flexibilidad deseable y era antipático a esos jóvenes cerebros.

Eso fué la ruina. Los unos declaran simplemente que ese ensayo desgraciado demostraba que la comprensión

de la geometría exigía mucha madurez de espíritu y propusieron volver al *statu quo* de antes; los otros, más perseverantes y más confiados en las capacidades de nuestros estudiantes, emitieron la opinión que el culpable no era el alumno, sino el profesor, y que era tiempo de buscar el medio de que la geometría fuera accesible para los niños.

La intención era loable, pero desgraciadamente los procedimientos empleados para realizarla no merecen quizá los mismos elogios. Con precipitación, pues el tiempo urgía, con harta frecuencia, se ha destrozado, cortado, remendado y recosido nuestra geometría clásica. Si un teorema parece demasiado difícil, se le suprime o se le transforma en axioma; si una proposición útil en la práctica viene con demasiada lentitud se le hace dar un salto adelante en la serie lógica. Fué eso lo que se designó con el nombre de geometría experimental, la que modestamente se contentaba con hacer conocer a los jóvenes *hechos geométricos*, en orden arbitrario, hasta el día en que aquéllos alcanzaran las clases superiores, en las que de un solo golpe todo se rectificaba.

Es preciso no haber enseñado jamás a niños para no saber la traza profunda que en ellos deja la primera iniciación y la confusión que se introduciría en sus espíritus superponiendo dos procedimientos tan radicalmente opuestos. Como ya lo he dicho más arriba, lo repito aquí con más fuerza, una modificación pedagógica no podría limitarse solamente a una parte de nuestra enseñanza, con el riesgo de romper su unidad y su continuidad. Es necesario revisar el conjunto o resignarse a no cambiar nada.

. . . .

. . . .

Clasifiquemos el antiguo edificio de Euclides, admirable de armonía y de perfección, en el rango de los monumentos históricos, y construyamos, según un nuevo plano, una obra homogénea, conforme con las necesidades del día.

Ved, señores, una importante tarea en la que todos debemos tomar parte. Estoy seguro que nuestros esfuerzós pueden tener éxito y permitidme, al terminar, croquizar la vía en la cual, en mi opinión, podemos entrar resueltamente.

Dos nociones experimentales se encuentran en la base de toda geometría: la de las figuras ideales que encaramos y la de los desplazamientos sin cambio de forma. «Si no hubiera cuerpos sólidos, ha dicho Henri Poincaré, no habría geometría». Podemos agregar que tampoco la habría si no hubiese movimiento que permitiera aproximar y comparar esos cuerpos. La posibilidad del desplazamiento siendo la condición primordial de la existencia misma de la geometría ¿no es natural el que de ese desplazamiento se haga el medio principal de investigación y de demostración en nuestro ameno método? Realizaremos, a la vez, dos notables progresos; pues, por una parte, instituiremos un modo de exposición más concreto y más accesible, aunque perfectamente riguroso, y por otra parte, preparemos la vía para la enseñanza de la cinemática que así se presentará como la prolongación o el complemento natural de la geometría. En lugar de seguir los procedimientos de Euclides, de colocar al principio los casos de igualdad de los triángulos destinados a suprimir lo más pronto posible los desplazamientos en todas las demostraciones, por lo contrario, tendremos cuidado de colocar esos desplazamientos en evidencia y, aliando sin cesar el ejercicio gráfico a la demostración teórica, los realizaremos a la vista de los alumnos con los instrumentos de dibujo. Así marcharan de frente la teoría y la aplicación.

Pero hay más.

Puesto que de ahora en adelante el desplazamiento será para nosotros el instrumento fundamental de demostración, es el que deberemos estudiar desde luego, lo mismo que un buen obrero aprende ante todo a conocer el instrumento que debe utilizar. Ahora, — y no es ese uno de los resultados menos sorprendentes de este nuevo método, —

nuestra geometría, así concebida, tomará un nervio inesperado. ¿Que es, en suma, el decir que se puede desplazar una figura invariable y que dos figuras iguales a una tercera son iguales entre sí, sinó afirmar que los desplazamientos forman *un grupo*, en el sentido que Gallois y Sophus Lie entienden ese vocablo? Entre aquellos estudiaremos al principio los más simples: las rotaciones y las traslaciones, y comprobaremos la existencia de subgrupos invariables. Colocados en ese terreno, observaremos entonces que lo que caracteriza la geometría llamada Euclideana, es el hecho de que *las traslaciones forman en ella un sub-grupo invariable.* Es ese, pues, el postulado que podrá reemplazar al que se ha aplicado el nombre de Euclides.

Es inútil, señores, que insista sobre este tema ante un auditorio de matemáticos; pues sin dificultad concebís las consecuencias múltiples de este nuevo método de exposición de la geometría pura. Presentando los hechos bajo una faz más natural, es ella más intuitiva y más accesible para los principiantes; pero, por otra parte, relacionándose a la más vasta de las teorías modernas, ella abre nuevos horizontes al alumno curioso. Como, por otra parte, ya he dicho « esta geometría desciende más abajo, pero también se eleva más ». Ciertamente los trabajos hechos en esta nueva vía están lejos de tener un carácter definitivo; pero los primeros ensayos son tan alentadores que me atrevo a afirmar que ya no es permitida la duda sobre su éxito final.

Unamos, pues, nuestros esfuerzos en una labor común. De la encuesta que hemos emprendido surgirán nuevas luces que iluminarán el camino que seguimos. Sin sacrificar nada de las cualidades de rigor, de lógica y de precisión que caracterizan a las matemáticas, sabremos discernir en ellas lo que es esencial, y poner en evidencia los medios más apropiados para preparar a los alumnos a la comprensión de las ciencias experimentales.

El límite entre las matemáticas puras y las matemáti-

cas aplicadas no existe, pues esas dos ciencias, lejos de estar separadas, deben sin cesar auxiliarse y completarse. Esta penetración recíproca es la prenda de un progreso cierto: evitará que los matemáticos malogren sus esfuerzos en trabajos de pura especulación, que hagan una obra estéril como ya lo ha sido en tiempos pasados, en buena parte, la de los filósofos griegos: detendrá a los experimentadores en la vía del empirismo y los obligará a someterse al contralor severo del Análisis.

IX

LA ADAPTACIÓN DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA A LOS PROGRESOS DE LA CIENCIA

Con este título dió en París (Abril 1914) Emilio Borel [1] una interesante conferencia, de la cual extracto lo que sigue que se refiere a la enseñanza de las matemáticas.

. . . .

A las razones generales señaladas más arriba sobre la lentitud de toda enseñanza secundaria, pueden agregarse otras que especialmente se refieren a la enseñanza secundaria de las matemáticas. Con mucho, son las matemáticas las más antiguas de las ciencias; los *Elementos de Euclides* remontan a cerca de veinticinco siglos; las partes elementales de la geometría y de la aritmética, desde hace mucho tiempo, han adquirido un grado de perfección lógica que no puede ser sobrepujado; si el fin principal de la enseñanza de esos elementos es habituar a los alumnos al rigor de los razonamientos, es completamente inútil buscar mejores modelos; es sin duda por eso que todavía se utiliza a veces, principalmente en Inglaterra,

(1) Publicado en *L'enseignement mathematique*, 1914.

las traducciones de la obra de Euclides para la enseñanza de la geometría. No es este el único ejemplo que podría darse de las tendencias conservadoras de la enseñanza de las matemáticas.

No es dudoso que, en matemáticas lo mismo que para otras disciplinas, el rol educativo de una enseñanza depende sobre todo de sus tradiciones; todo trastorno es, pues, desde luego perjudicial. En la ordenación de las materias, en la elección de los ejercicios, en las respuestas que los profesores deben dar a las objeciones más o menos conscientes de los alumnos, la experiencia de muchas generaciones guía en cada instante. Cuando una enseñanza es enteramente nueva, cuando una misma enseñanza se aplica por primera vez a alumnos relativamente más jóvenes, toda esta tradición debe crearse; cada profesor sólo puede contar con su propia experiencia, y la experiencia de un solo hombre es muy poca cosa respecto de la experiencia de muchos siglos de profesores. Aún en el supuesto de que por parte de los profesores jóvenes o viejos no haya ninguna prevención contra las innovaciones, que ningún prematuro desaliento se produzca como consecuencia de ensayos de mediocres resultados por razones quizá fortuitas, no es posible esperar que la nueva enseñanza alcance pronto el mismo grado de perfección a que llegaron las antiguas enseñanzas que han venido a sustituir. En las circunstancias más favorables, se requiere por lo menos una generación para alcanzar ese grado de perfección, tratándose de innovaciones de alguna importancia; es preciso, en efecto, que la mayoría del cuerpo enseñante sea renovada, pues, generalmente es muy difícil adaptar a jóvenes alumnos una enseñanza que uno mismo no haya recibido a la edad de aquéllos.

Entonces se siente la tentación de preguntarse si vale la pena de ocuparse de los programas de matemáticas de enseñanza secundaria. Si esa enseñanza tiene por objeto la formación del espíritu y no la adquisición de conocimientos precisos, y si ese objeto se alcanza de una

manera casi perfecta por los programas tradicionales ¿por qué modificar esos programas, puesto que se tiene la seguridad que todo cambio producirá una pequeña crisis? Quisiera expresar brevemente porque esta actitud no me parece aceptable.

Desde luego, por una razón de hecho. No es posible conservar intangible una porción de un organismo del cual todas las demás partes se transforman. Ahora, las humanidades literarias y científicas forman un todo: no deben encararse separadamente los diversos programas especiales, puesto que el fin de la enseñanza es uno, la formación del hombre culto. Las matemáticas no pueden pues, quedar como la sola parte inmutable en una enseñanza en que todo se transforma: las mismas necesidades de las enseñanzas linderas imponen modificaciones de las que fácil sería dar ejemplos.

Además, y esto es quizá más importante todavía, no dejaría de ser un peligro que una enseñanza se separara cada vez más de la vida y de la realidad. Las aplicaciones de las ciencias penetran más cada día en nuestra existencia; nos servimos cuotidianamente de una bicicleta, constantemente vemos diagramas en nuestros periódicos, construimos curvas de temperaturas cada vez que uno de los nuestros está enfermo. Si la enseñanza de las matemáticas se relaciona a tales objetos familiares, despertará interés, y, sobre todo, escapará a la mortal escolástica. Cuando una enseñanza es demasiado escolástica, disgusta a un gran número de alumnos y, más bien que formar, deforma el espíritu de una parte de los demás; no se puede afirmar que la enseñanza matemática haya sabido siempre evitar ese escollo.

Cuando se habla de aproximar la enseñanza de las matemáticas a la realidad, algunos creen o fingen creer que simplemente se trata de rectificar diciendo redondo en lugar de círculo, bola en lugar de esfera, pan de azúcar

en vez de cono, etc. Olvidan que la enseñanza de las matemáticas no puede tener todo su valor educativo sino enseñando a evitar ese sofisma, muy frecuente, que consiste en creer que las dificultadas reales pueden ser resueltas por medio de simples definiciones de palabras, sin que sea necesario verificar la coherencia de esas definiciones con el vocabulario vulgar. El niño tiene una idea concreta del círculo o de la esfera; por otra parte, el geómetra da de ellos una definición abstracta, sobre lo cual basará sus razonamientos; el sofisma consiste en admitir sin examen, simplemente porque la palabra empleada es la misma, que la esfera concreta del buen sentido y la esfera abstracta del geómetra, son exactamente la misma cosa. Es preciso, pues, en cada instante confrontar las definiciones con las realidades, a fin de comprobar el acuerdo — por lo menos aproximativo — entre la lengua artificial, creada por los matemáticos, y la lengua vulgar a que está habituado el alumno.

El admirable desarrollo científico del siglo XVIII, que tuvo como consecuencia el desarrollo industrial del siglo XIX, puede referirse a cuatro grandes nombres: Galileo, Descartes, Newton y Leibnitz. Gracias a la geometría analítica y al cálculo diferencial, han podido tratarse hasta el fin los problemas mecánicos, sobre principios bien establecidos. Es quizá ese hecho el más importante de la historia de la humanidad; es gracias al predominio industrial así adquirido que el hombre ha conquistado y organizado el mundo. En el orden material no hay un objeto y no hay un pensamiento nuestro en el orden moral sobre los cuales no pueda reconocerse la influencia de la revolución científica del siglo XVII. Sin los principios de la mecánica, de la geometría analítica y del cálculo diferencial, nada existiría de lo que constituye la moderna civilización. No hay rama de la actividad humana sobre la cual la influencia del genio de Galileo, de Des-

cartes, de Newton, de Leibnitz, no haya sido considerable; me equivoco, hay una que ha escapado a esa influencia y que ha permanecido invariable: es la organización de la enseñanza secundaria de las matemáticas. Es solamente en 1902 que se hizo un modesto ensayo en los programas franceses, por hombres que juzgaron que dos siglos era un plazo suficiente para que las *nuevas* ideas, hayan hecho sus pruebas y puedan sin inconveniente ser expuestas a la juventud. Esta innovación ha parecido a muchos escandalosa y actualmente aún se discute sobre ella. Esas discusiones, a las cuales se consagrará una parte de las sesiones de este Congreso, tienen que ser provechosas, pues toda nueva enseñanza es difícil de crear; es solamente poniendo en común la experiencia de muchos profesores que puede esperarse que se abrevie algo el plazo durante el cual la innovación, por falta de suficiente adaptación, ofrezca reales inconvenientes. No quiero anticiparme a esas discusiones, las cuales seguramente, serán varias y fecundas, dado el número y competencia de los congresistas; solamente deseo ensayar y responder a algunas objeciones *a priori* que frecuentemente he oído formular contra toda innovación de los programas de matemáticas. Esas objeciones tienen por principal punto de partida la representación que a menudo se hace de la ciencia matemática como una serie lineal, o un pequeño número de series lineales en cada una de las cuales el orden riguroso de los antecedentes y de los consecuentes no puede ser modificado. Aceptando esta representación, es claro que no puede introducirse una nueva materia sino conservando todas las que preceden en el desarrollo lógico de la ciencia; a menos de inflar desmesuradamente los programas, no podrán, pues, introducirse nuevas ideas. En particular, se tiene el hábito de calificar de superiores ciertas partes de las matemáticas por oposición a las elementales; de ese número son el cálculo diferencial y el cálculo integral, cuyo solo nombre produce terror a los profanos; es, pues, absurdo, se dice, querer enseñar esas

materias superiores, de las cuales también forma parte la geometría analítica, a los que sólo imperfectamente conocen las llamadas matemáticas elementales. Se extrañarían muchos de nuestros contemporáneos, que fueron alumnos más o menos mediocres en las clases de matemáticas, que mirando gráficos como con frecuencia aparecen en los diarios, aplican, sin saberlo, la geometría analítica; aún, a veces, al discutir sobre la rapidez más o menos grande de las oscilaciones de esos gráficos, y sobre las consecuencias que de ellos pueden deducirse, aplican, sin saberlo, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Esas temidas disciplinas están, por lo menos en sus elementos, mucho más cerca de las simples nociones del cálculo que se adquiere en la escuela primaria, que numerosas consideraciones sobre los volúmenes de los cuerpos redondos, o sobre las ecuaciones de segundo grado, o aún que los cálculos de las fracciones ordinarias [1] y muchas otras cuestiones que son la pesadilla de los alumnos y que el noventa y nueve por ciento de ellos se apresuran a olvidar después que han dado su examen.

Los verdaderos elementos de las matemáticas, de los cuales no puede prescindirse para ir más adelante, se reducen a poca cosa: a las nociones de aritmética y de geometría necesarias para comprender y aplicar el sistema métrico, [2] basta agregar los principios de la notación

(1) El excesivo sitio que en la enseñanza de la aritmética ocupa la teoría de las fracciones ordinarias es una supervivencia de la época en que no era usual el sistema métrico, como lo es actualmente en los países civilizados, con una excepción. La vulgarización del sistema métrico debia tener como consecuencia la sustitución general de las fracciones decimales a las fracciones ordinarias, y por lo tanto una simplificación de la enseñanza de la aritmética, debiendo ser enseñadas directamente las operaciones de los decimales, como simple generalización de las operaciones de los enteros. Las fracciones ordinarias son de interés para el matemático, es verdad, pero no lo son menos las continuas, y sin embargo no figuran en los programas elementales.

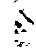
(2) Algunas personas «cultivadas» tienen sobre estas nociones una ignorancia grosera que a veces conduce a curiosos absurdos. Hace muy poco tiempo, en un gran diario de la mañana, un título de grandes letras indicaba que el precio del pavimento era de *tres francos el centímetro cuadrado;* leyendo el artículo que su autor lo habia escrito según un artículo inglés en el cual se daba al precio de cien francos (o de cuatro libras creo) el *pie cuadrado*. El periodista francés se ha-

algebraica para tener una base sólida a partir de la cual puedan estudiarse las matemáticas en direcciones variadas, sin que un particular orden de materias sea impuesto de otro modo que por la tradición y el uso. Si no existieran las tradiciones, podría proponerse organizar en todas sus partes una enseñanza matemática adaptada a las necesidades actuales de la ciencia y de la industria; la mecánica tendría en ella bastante importancia, y le estarían subordinadas las otras disciplinas. Sería muy interesante intentar una organización semejante en un país en vía de rápido desarrollo; es probable que después de un corto período de tanteo, se obtuvieran considerables ventajas. Pero en los países donde la enseñanza secundaria se encuentra sólidamente organizada desde hace mucho tiempo, no pueden ocasionarse tan grandes trastornos a expensas de toda una generación de estudiantes; por las razones ya expuestas, los cambios deben ser lentos; pero quizá no es exagerado pensar que es tan absurdo para el profesor de matemáticas de enseñanza secundaria parecer ignorar a Galileo, Descartes, Newton y Leibnitz como lo sería para el de química, ignorar a Lavoisier, o para el de historia descuidar la Revolución Francesa. Se encontraría así la enseñanza de las matemáticas menos mal coordinada con las demás enseñanzas científicas; sobre todo estaría mejor coordinada con las realidades, y sin duda interesaría a mayor número de alumnos. Se atenuaría esa desproporción verdaderamente paradojal entre el rol que las matemáticas tienen en la vida de las sociedades modernas y el interés que en aquellas tienen gran número de los que dirigen esas sociedades. Es que en el fondo las matemáticas enseñadas en nuestros liceos no son más que una reliquia escolástica; son otras las matemáticas que rigen el mundo; a

---

bía informado; un pie son treinta centímetros; luego un pie cuadrado son treinta centímetros cuadrados, de ahí ese preeio de tres francos (en lugar de diez centésimos, aproximadamente, que se encuentra cuando se tiene en cuenta los $30 \times 30 = 900$ centímetros cuadrados que comprende un cuadrado de 30 centímetros de lado).

aquellas matemáticas, sólo es dado a un pequeño número el admirar plenamente toda su soberbia complejidad; pero todo hombre cultivado debía saber por lo menos que ellos existen y no imaginar a los matemáticos como maniáticos que pasan sus noches en extraer raíces cúbicas, o aun raíces quintas, tal como los célebres caballos de Erberfeld.



Puede preguntarse si la adaptación de la enseñanza secundaria a los progresos de las ciencias no resultaría peligrosa en cuanto que ella no se terminaría jamás; desde que se abandonan la sabia inmutabilidad, podemos ser arrastrados a cambios constantes, cuyos inconvenientes son manifiestos. Es necesario, en efecto, que la adaptación sea prudente y progresiva: lo mismo que en los programas de literatura no se admiten los autores modernos sino después de cierto lapso de tiempo después de su consagración por los contemporáneos, así los programas científicos deben guardarse de las modas pasajeras, del demasiado frecuente defecto de perspectiva que nos hace mirar como particularmente importante el último descubrimiento hecho a nuestra vista. El fin de la enseñanza secundaria científica no es el preparar los alumnos para que comprendan y perfeccionen los aereoplanos, la telegrafía sin hilos, ó la cinematografía de colores; pero los más prudentes deberán mostrarse satisfechos si, para dar a la enseñanza matemática, base de la enseñanza científica, una estabilidad particular, se evalúa en un siglo el plazo después del cual los trabajos importantes para la ciencia no serán considerados como inexistentes. Ahora, hace más de dos siglos que los principios de la mecánica, de la geometría analítica, del cálculo infinitesimal, experimentan la victoriosa prueba del tiempo; no se trata de fantasías pasajeras, es la sustancia misma de todo nuestro esfuerzo científico. Es solamente cuando esas doctrinas esenciales habrán tomado el rango que deben ocupar,

que nuestra enseñanza secundaria científica será verdaderamente educadora y moderna.

Queda por considerar una objeción hecha *a priori* con frecuencia, y a la que no podría contestarse con hechos sino después de una larga experiencia. ¿No es de temerse que las nuevas materias, insuficientemente adaptadas, sean menos propicias a la cultura general que las antiguas? Es la objeción ya señalada contra todos los cambios: hemos dicho porque ella contiene una parte de la verdad.

Todo cambio de programas debe necesariamente escollar, o por lo menos tener la apariencia de escollar, por la simple razón de que la masa de los profesores no puede llegar de golpe a una técnica pedagógica tan buena para las materias nuevas como lo fuera la técnica tradicional para las antiguas. Pero la contraparte de esa comprobación pesimista no es menos exacta: si es verdad que lo esencial en la enseñanza secundaria es menos el programa que el método, todo cambio de programas debe en definitiva dar buenos resultados, después que hayan sabido crearse los métodos apropiados para las nuevas materias. Sería demasiado paradojal el sostener que esos métodos no existen quizá y que está en la naturaleza de ciertas disciplinas el ser menos educativas, precisamente porque ellas son más perfectas.

Es así, sin embargo, que con frecuencia se ha opuesto la aritmética al álgebra y se ha ensayado de proscribir artificialmente el empleo de la notación algebraica, aún en el caso en que este empleo simplifica notablemente el esfuerzo. A veces se insiste sobre el hecho de que esta simplificación del esfuerzo es precisamente perjudicial, siendo bueno el esfuerzo y no el resultado. Es casi lo mismo que si se pretendiera que vale más no enseñar la multiplicación a un niño a fin de que si desea saber cuanto cuestan 125 objetos a 3 fr. 75 cada uno, esté obli-

gado a emplear el procedimiento más largo, que consiste en sumar 125 números iguales cada uno a 3 fr. 75; su esfuerzo será más considerable y aprenderá admirablemente la técnica de la adición, que es una bella operación aritmética. Eso no es dudoso; pero cuando sepa multiplicar, podrá exigirse de él un esfuerzo tan grande con este instrumento más perfecto, y este esfuerzo no por ser menos estéril será por eso menos provechoso. Los problemas de geometría elemental dan ocasión a esfuerzos muy ingeniosos y a veces penetrantes, de los cuales no pierden jamás el recuerdo los que han tenido el gusto de ellos en su juventud; pero la dulzura de esos recuerdos no debe, sin embargo, hacer perder de vista que esos esfuerzos, con frecuencia, son tan vanos como el de la adición de 125 números iguales entre sí (1); métodos más perfectos permiten obtener sin trabajo los mismos resultados y, gastando los mismos esfuerzos con los métodos perfeccionados, se va mucho más lejos. Lo mismo sucederá con el cálculo diferencial e integral; no dudemos en iniciar lo más pronto posible a los alumnos en esas admirables disciplinas, a la vez más útiles y más educativas que cualquiera otra rama de las matemáticas.

No es solamente en matemáticas que las tendencias opuestas, reformadoras y conservadoras luchan a propósito de los programas de enseñanza secundaria. Si los reformadores llegaran a comprender bien que todo cambio es malo mientras que se le realiza y si los conservadores admitieran que un cambio, si no es absurdo, resulta bueno, una vez que ha transcurrido cierto tiempo después de realizado, y que la enseñanza tampoco puede

(1) Quizá no sea inútil precisar mi pensamiento, pues él no ha sido comprendido por todos mis agentes. Jamás he puesto en duda que el estudio directo de las figuras no fuera necesario en los jóvenes alumnos el sentido geométrico; simplemente he querido elevarme contra el abuso de ciertos problemas artificialmente e nútilmente complicados (Nota agregada después de la conferencia)

quedar inmutable a través de los siglos, podrían quizá conciliarse esas dos tendencias opuestas en una evolución lenta, sobria y prudente.

X

REFLEXIONES SOBRE LA PRIMERA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Por C. A. Laisant (1)

Se trata aquí de la Geometría elemental. Todos los que se han ocupado de la enseñanza, saben que en ella es de capital importancia la primera dirección que se da al espíritu, y a pesar de los estudios publicados, el tema no está agotado, y sobre él queda mucho por decir. Entre los profesores más eminentes y que tienen las ideas más personales sobre esa primera enseñanza de la Geometría, puede citarse al coronel Mannheim, universalmente conocido por los matemáticos, y que enseña la Geometría descriptiva en la Escuela Politécnica de París.

Nos hubiera complacido en extremo obtener de él uno o varios artículos destinados a nuestros lectores; pero se ha confinado, por decirlo así, exclusivamente en la publicación de trabajos puramente científicos y se muestra resuelto a seguir en esa vía. Como insistiéramos, mostrándole todo el interés y toda la utilidad que ofrecería el desarrollo de ideas muy antiguas, muy arraigadas en él (y muy justas en nuestra opinión), nos comprometió vivamente a que nosotros mismos presentáramos esta exposición, y a que aprovecháramos para el efecto las frecuentes conversaciones que con él habíamos tenido sobre esta materia. Aún llegó a ofrecerse a remitirnos algunas notas, lo que en efecto, realizó con su habitual benevolencia.

. . . .

(1) Artículo publicado en L'enseignement mathematique, 1899.

Cuando un alumno empieza a iniciarse en la geometría, sea él un niño, sea que haya alcanzado cierta edad, como con frecuencia ocurre en la enseñanza popular, un primer obstáculo se le presenta: es la novedad del lenguaje. Oye enunciar una série innumerable de expresiones, familiares al profesor, ve desfilar ante su vista un número excesivo de términos, los cuales no se fijan en su espíritu con la deseable claridad. Con mayor razón, el principiante no puede seguir, o más bien adivinar, la idea que requiere el empleo de ese lenguaje. Desde el principio, la memoria se encuentra, no sólo en juego, sino sobre-cargada, abrumada de fatiga, y empieza el desaliento.

La primera preocupación del profesor debe ser de combatir la dificultad que acabamos de señalar, y aun de suprimirla, si fuera posible. Para esto basta hacer dibujar las figuras más simples de la Geometría plana, escribiendo siempre el nombre de cada una al lado del dibujo que la representa. En apariencia, esta manera de proceder alargará el procedimiento, y producirá un retardo en la enseñanza; en realidad, acelerará su marcha, pues el tiempo empleado en estudiar bien y en comprender, jamás es tiempo perdido; ampliamente, se encuentra más tarde el beneficio.

No es eso solamente. En vez de limitarse a hacer ejecutar el dibujo de las figuras, a medida que se las define, es además necesario, siendo también posible, hacer que los alumnos efectúen ciertas construcciones fáciles. Reproduciendo esas construcciones muchas veces, retendrán su mecanismo, y al mismo tiempo aprenderán, sin apercibirse, puede decirse, los términos que se emplean para guiarlos en la ejecución de los trazados.

Una cosa esencial, en esta primera parte de la enseñanza geométrica, es hacer que la ejecución de cada dibujo se haga a una determinada *escala*. Esto equivale a decir que la idea de *relación* debe colocarse en la base de la enseñanza de la ciencia de las magnitudes, al prin-

cipio mismo de esta enseñanza, al opuesto de la tradición profundamente irracional, que relega esa noción al fin de la Aritmética, y al tercer libro de la Geometría. Trátese de números como de longitudes, la idea de absoluto es siempre hueca y vana; nada podemos, en tanto no ensayemos contar y medir; para contar o medir, necesitamos la unidad; la elección de esta unidad queda a nuestro arbitrio; pero, una vez elegida, el número que sirve para evaluar una colección de objetos, una longitud, o cualquier magnitud mensurable, sólo se implanta en el espíritu bajo forma de relación. En Geometría, para volver al tema que nos ocupa, esa relación sólo nos da la noción precisa de las figuras, y desde luego se comprende que la elección de escala no es otra cosa que la elección de una unidad. Construir un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a 2, por ejemplo, es una expresión vacía de sentido; por lo contrario se hace muy precisa desde que se haya dado la escala, es decir la unidad de longitud que sirve para la ejecución del dibujo.

Entre las construcciones elementales y simples que se puede y que se debe así hacer ejecutar al principiante, conviene señalar las siguientes:

Construir triángulos isósceles;

Construir un triángulo equilátero;

Determinar la bisectriz de un ángulo;

Levantar una perpendicular en el medio de un segmento;

Inscribir un exágono regular, un triángulo equilátero, un cuadrado, en un círculo, etc., etc....

A continuación de estos ejercicios convenientemente graduados, repetidos y practicados con el mayor cuidado material, el alumno no encontrará dificultad en comprender lo que son los datos que permiten establecer una figura. Esta noción le vendrá por sí misma, en cierta manera, pues él estará siempre en guardia, en la ejecución de sus trazados, para ver si los datos que se le dan son suficientes o si no son superabundantes. En caso de insu-

ficiencia, reconoce en efecto que el trazado no puede conducirse con precisión puesto que la figura que debe obtener no está completamente definida, si bien existe entonces indeterminación. Si por lo contrario, los datos son demasiado numerosos, resultarían contradicciones, y como consecuencia una imposibilidad.

Llegado el alumno a este punto, podrá decírsele sin explicación, pues sería inútil que se le diera:

Dos figuras construídas con los mismos datos, de la misma manera y con la misma escala, son dos figuras iguales.

Esto equivale a una teoría de figuras iguales, y nos atrevemos a decir a la única teoría razonable de las figuras iguales. ¿No es insensato, sobre todo, considerar, por ejemplo, como iguales, como se hace corrientemente, dos triángulos simétricos con relación a una recta, y confundir con la misma denominación figuras que pueden ser superpuestas, las unas sin salir del plano en que están trazadas, las otras haciéndolas efectuar un giro, es decir un desplazamiento a través del espacio?

Con no menor facilidad, el alumno familiarizado con los trazados de que hemos hablado, admitirá la definición siguiente:

Dos figuras construídas con los mismos datos, de la misma manera y CON ESCALAS DIFERENTES, *son figuras semejantes.*

Comprenderá muy bien que una de esas figuras es en grande lo que la otra es en pequeño. Habrá dado cuerpo a la noción banal y, por decirlo así, intuitiva, que nos hace decir de dos figuras, que tienen la misma forma y magnitudes diferentes. En una palabra, poseerá los elementos esenciales de la teoría de la semejanza.

Así preparado, el alumno podrá desde luego aprovechar de una enseñanza geométrica normal, comprender el lenguaje que se empleará y realizar progresos. Se le habrá preparado el camino en lugar de acumularle, como con agrado, obstáculos en su marcha.

Es exclusivamente sobre esta enseñanza del principio que versan las observaciones del coronel Mannheim que

acabamos de reproducir. Es en efecto, la parte más esencial, y compartimos completamente sus opiniones al respecto. Pero, en cuanto al desarrollo ulterior de la instrucción geométrica habría todavía muchas observaciones y muchas críticas que hacer. Sea por el método seguido (del cual muchos autores y profesores tratan visiblemente de libertarse), sea por la elección, frecuentemente absurda de innumerables proposiciones acumuladas bajo el nombre de teoremas, sea por la omisión de nociones esenciales que sistemáticamente se pasan en silencio, se paraliza a los alumnos, se anulan de antemano los resultados, desarrollando un gran trabajo para obtener escaso provecho. Es un tema que espero volver a tratar, no en un artículo, sino en veinte quizá, pues el asunto es vasto, sino inagotable. Pero este tema, ni siquiera deseo iniciarlo aquí, y simplemente prefiero entregar a la meditación de los profesores las reflexiones del sabio de las cuales he ensayado hacerme intérprete.

XI

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS SEGÚN MERAY

En el informe del profesor Rousseau sobre la enseñanza de la geometría, aparece una referencia elogiosa, merecida por cierto, de los principios establecidos por Meray[1] para la enseñanza de aquella ciencia: como esos principios son los que se aplican actualmente en los textos modernos y en la enseñanza secundaria, conviene que se conozcan más directamente las ideas del sabio profesor de Dijon, propagadas y aplicadas en Francia por el profesor Bourlet. Será así más fácil darse cuenta de los métodos modernos y de la tendencia que debe darse a los estudios matemáticos en las escuelas secundarias.

(1) Véase las páginas 467 y siguientes de este libro.

Nada mejor, para el efecto indicado, que la transcripción de los siguientes párrafos de una publicación hecha por Meray en 1892, titulada *Consideraciones sobre la enseñanza de las matemáticas:* como es natural limito la transcripción únicamente a los párrafos que más directamente interesan a la enseñanza elemental de las matemáticas.

. . . .

«Antes de exponer las modificaciones que sueño en la enseñanza de las matemáticas en sus diversos grados, conviene formular algunos principios generales de la materia que, si son admitidos por el lector, harán que, como yo, juzgue esas innovaciones como deseables.

En el mundo intelectual, como en el de la materia y de la energía, nada sale de nada, y todos los razonamientos científicos son infinitamente menos creaciones de nuevas verdades que transformaciones de ideas antes adquiridas, de una u otra manera, que un medio de una potencia extraordinario para agrupar nuestros conocimientos en el orden en que ellos sean más fáciles de conservar, de trasmitir y de estudiar. No pudiendo, pues, prescindir de esas ideas primeras, llamadas *hipótesis* en las ciencias físicas, *axiomas* en matemáticas, encontrádonos en presencia de un número *incalculable* de nociones o *proposiciones* que pueden encadenarse de mil maneras por el razonamiento, es absolutamente indiferente del *punto de vista de la certeza del todo,* que tales o cuales, en mayor o menor número, sean tomadas para desempeñar ese rol de ideas primeras.

La conquista de una nueva era está asegurada por la justeza del razonamiento que a aquélla puede conducir y por la exactitud de sus principios, *cualesquiera que ellos sean.*

La certeza de un grupo de nociones susceptibles de ser solidarizadas por el razonamiento es una cantidad de *conjunto;* que a ninguna de ellas pertenece en propiedad, con exclusión de las demás; y, por decirlo así, jamás la exactitud de una hipótesis física puede ser comprobada

más que por la verificación experimental del conjunto de las consecuencias accesibles a la observación, que el razonamiento permita deducir. Nadie todavía ha percibido una molécula de éter; se sabe sin embargo que existe el flúido de ese nombre y que vibra, puesto que se ha conseguido extinguir un rayo luminoso con la superposición de otro; se sabe que esas vibraciones son transversales, porque dos rayos polarizados en ángulos rectos no pueden interferir. Lo mismo ocurre con el principio de la gravitación universal, cuya solidez sólo es revelada por el constante acuerdo de las previsiones que suministra, con las observaciones de los astrónomos, etc.

La exactitud de un axioma matemático no tiene otro carácter; se ha querido, y todavía se quiere imponer la *evidencia;* pero el sentido de esa palabra es completamente relativo. Tal hecho percibido sin esfuerzo por un espíritu dado no lo será por otro, sea que la naturaleza haya hecho este último menos penetrante, sea que haya sido menos ejercitado. Si por otra parte, nos era fácil analizar completamente las circunstancias que nos han dado una evidencia relativa a tal hecho determinado, encontramos en él, sin ninguna duda, mezcladas a percepciones directas las percepciones indirectas suministradas por la verificación sensorial de sus consecuencias lógicas inmediatas. Entre la exactitud de una hipótesis física y la evidencia de un axioma matemático, no existe, pues, ninguna diferencia esencial; solamente existe la de menos grande o más grande.

El rigor de un encadenamiento de proposiciones, de una teoría científica, como se dice, no depende, pues, ni de la naturaleza, ni del número de hipótesis o axiomas que la fundan, sino solamente de un punto de partida exactamente hecho por el espíritu, entre ellos y el que se saca por el razonamiento.

Más nos alejamos del análisis en el dominio general de las ciencias exactas más se apartan también los límites entre los cuales puede hacerse la elección de los axio-

mas o hipótesis: variadas circunstancias pueden recomendarnos tales o cuáles, pero ninguna nos puede ser impuesta.

Pasemos a los estudios geométricos, empezando naturalmente por los Elementos. Se imagina generalmente que la certeza de la geometría sólo tiene por causa la propia evidencia de los axiomas admitidos y el rigor del razonamiento; en mi opinión, como ya lo he hecho presentir, es un completo error. Los obreros constructores (carpinteros, etc.), desprovistos generalmente de todo barniz de geometría metódica, saben, sin embargo, ejecutar ciertos trazados muy lejanos de los axiomas en cuestión, y tienen en la exactitud con que proceden una fe robusta de la cual no sería siempre bueno burlarse; ahora, esta fe no puede provenir ni de los axiomas que se dicen fundamentales que jamás han distinguido de cantidad de otros hechos geométricos existentes que conocían, ni de razonamientos que no estarían en condiciones de ajustar; su único fundamento, que vale tanto como otro cualquiera, es que sus trazados concuerdan entre sí y les han procurado cortes irreprochables. En las primeras proposiciones de la geometría racional, solo hay que ver lo que la naturaleza de las cosas haga necesario, sino *simples arreglos*, construídos con más o menos arte, *después de hecha aquella ciencia* al reunir simples hechos descubiertos hace mucho tiempo, por medios y en un orden igualmente desconocidos. Me basta como prueba citar la misma variedad de esos arreglos, que acrece diariamente, sin que jamás haya alcanzado en lo mínimo a alterar la la certeza de la geometría.

Los ingleses, ya he dicho, conservan con delicia el de Euclides; es cuestión suya el gustar así lo que es menudo y huele a pergamino enmohecido. Pero nosotros, franceses, que en todo y no sin algún fundamento, nos preciamos de vistas claras y amplias, de procedimientos elegantes, deberíamos hacer cosa mejor, más grande que repetir sir cesar esas antiguallas. ¿Del punto de vista dog-

mático cuál es el valor de esta definición, *la línea recta es el camino más corto entre dos cualesquiera de sus puntos?* Completamente el de una petición de principio. Efectivamente, si la comparación numérica de dos *segmentos rectilíneos* es realizable por su descomposición en fragmentos todos superponibles, la de dos *caminos curvos* ya no lo es directamente pues deja de ser posible semejante descomposición; y para hacer la comparación no hay otro medio que la de dos líneas quebradas de lados infinitamente pequeños, inscriptos la una en la otra. Ahora, *siendo segmentos rectilíneos* los lados de esas líneas quebradas, la operación que consideramos exige ineludiblemente la adquisición *previa* de esta noción de líneas rectas que por lo contrario se trata de precisar. Sólo se quiere partir de hechos de una simplicidad irreductible; desde cátedras con frecuencia muy elevadas, algunos simplistas han proscripto toda consideración de movimiento en geometría (como si la concepción de figuras distintas pero superponibles, pudiera separarse de la de un desplazamiento capaz de aplicar la una sobre la otra); y sin embargo vemos, en la primera demostración clásica relativa a las perpendiculares, un semiplano que gira alrededor de una recta para ir a aplicarse sobre otra. ¿Es acaso *inmóvil?* Este movimiento de rotación es lo que hay de más *simple,* y, para el que no lo hubiera observado muchas veces, ¿sería *evidente* en particular, que el más corto camino de un punto a otro puede desempeñar el rol de *charnela?* ¿Se permanece solamente en ese *plano* donde por lo contrario se pretende aprisionar la mitad de la geometría, etc.?

Por feo que sea ese árbol, no diría que deba derribarse si llevara buenos frutos; pero de todos, éstos son, lo repito, los más amargos y los más indigestos. Una serie interminable de minúsculos teoremas apoyándose sobre todo, agarrándose a todo a propósito de nada, sucediéndose en horroroso desorden, por más que sea un efecto del arte, empieza por sobrecargar la atención y la me-

moria de los niños, por disgustar a la mayor parte de ellos: se les atora con todas las futilezas de la Geometría plana. Una nueva nube de teoremas en polvo viene a enceguecer al grupo de alumnos al que se digna hacer los honores del espacio, y exhibirles nuevamente, bajo formas con frecuencia desacostumbradas, los objetos que han considerado en la Geometría plana. La representación termina por cuadraturas y cubaturas, algunas de las cuales son tan inútiles como difíciles, y por algunas palabras, generalmente bastante mal comprendidas, sobre la simetría y la semejanza. En resumen, los niños del pueblo no aprenden la Geometría porque los hechos que les interesarían han sido colocados muy lejos de su alcance. Son como premios colocados en el extremo de un palo de cucaña demasiado elevado y demasiado bien enjabonado para que tengan el tiempo de subir a él. Los alumnos de las clases llamadas *de Letras*, en los colegios, no aprenden, o bien sólo han retenido algunas partículas de Geometría plana, cosa más o menos equivalente, pues los unos se han desalentado viendo la cucaña perderse en las nubes, y los otros sólo han alcanzado la mitad de su altura. En cuanto a los alumnos *de Ciencias*, han aprendido de ella tan poco, aún después de muchos años de estudio, que se hace necesario embarazar en su cuarta parte el curso de Geometría descriptiva, con los teoremas generales más importantes; en fin, ni siquiera sospechan que nuestro Poncelet por su perspectiva, nuestro Chasles, por su *Principio de correspondencia*, les han creado medios de tratar como por diversión, mil cuestiones actualmente inabordables para ellos.

Los Griegos de la Antigüedad enseñaban lo que sabían, y para atenerse a ello, tenían una buena razón, y es que no podían hacer cosa mejor; pero, francamente, no valía la pena de nacer a fines del siglo XIX para estar siempre alimentado con un caldo flaco; y si es sabroso, ¿por qué no se vuelve al Algebra de Diofanto? Lo que es yo, no puedo declararme satisfecho. Considerando

que en Geometría, lo mismo que en Aritmética y fuera de ella, el razonamiento se hará en el vacío, tan largo tiempo como no tenga como punto de apoyo un conjunto suficiente de nociones primeras adquiridas anteriormente por medios empíricos, quisiera que la edad en que los niños aprenden los nombres de los números y la práctica del cálculo, aprendieran al mismo tiempo a conocer, por la vista y por el tacto, el punto, la línea recta, el plano, y sus combinaciones elementales (paralelas, perpendiculares, segmentos rectilíneos, ángulos, etc.).

Esta primera educación consistiría en lecciones análogas a las llamadas *de cosas* en la enseñanza infantil; el maestro presentaría trazados a los alumnos, modelos simples de relieve, construídos *ad hoc* o bien juiciosamente escogidos de los objetos circundantes, y los llevaría poco a poco a distinguir y nombrar en ellos los elementos. Al mismo tiempo les enseñaría a trazar sobre el papel rectas que pasaran por dos puntos dados, paralelas, perpendiculares, etc., les haría analizar los movimientos simples que a cada instante pueden observarse, como el de traslación (escuadra, deslizando sobre una regla, cajón de un mueble, etc.), el de rotación (objetos móviles, sobre goznes y charnelas, como puertas, tapas de cofres, tapas de libros encuadernados, compás que tenga una punta fijada en el papel, etc.). Los que han visto niños de corta edad entretenerse largas horas en los juegos llamados *de construcción*, o aun solamente en manejar reglas, escuadras y compases, no dudarán del interés que tales ejercicios bien dirigidos podrían ofrecerles, y al pasar, agregaré que con ellos se encontrarían con mejor preparación para el estudio del dibujo.

. . . .

La geometría descriptiva familiariza a los alumnos con las figuras del espacio, en cierto modo los obliga a asimilar las más importantes proposiciones del curso de Geometría elemental, les explica de antemano todos los dibujos geométricos que se presentaren a su vista, los

ejercita a ejecutarlos bien; además, ella es interesante cuando no se lleva demasiado lejos. Atribuyo, pues, la mayor importancia a ese estudio, muy fácil por otra parte, y quisiera después de haberlo aliviado de los teoremas de geometría general que están fuera de lugar en ella, que se le pudiera ampliar en los cursos inferiores, con construcciones en las que figuraran otras cosas que las rectas y los planos. Pero en los cursos superiores, su teoría y su práctica duran un tiempo considerable, que sería mucho mejor empleado en estudios más serios. ¿Es razonable enseñar a los alumnos además de los principios esenciales de las construcciones, hacerles consumir días en confeccionar los dibujos más extraños?

En los cursos de matemáticas elementales, la trigonometría debiera reducirse a la definición de los senos, cosenos, etc., considerados como números característicos de los ángulos inferiores a dos rectos, a la demostración geométrica de las fórmulas de resolución de los triángulos y a la explicación puramente descriptiva de la disposición de las Tablas. La supresión de las fórmulas generales de las cuales se puede prescindir de esos llamados principios de la construcción de las Tablas, permitiría agregar las relaciones fundamentales entre los elementos de un triedro que son muy útiles en la geometría del espacio. En los cursos de matemáticas especiales, esas fórmulas generales serían relacionadas con la teoría analítica de las funciones circulares.

Lo mismo que en geometría, la entrada de la mecánica está obstruída por un armazón extraordinariamente laborioso de pequeñas proposiciones que no satisfacen al espíritu, que exigen un tiempo demasiado largo para su estudio, pero un instante solamente para ser definitivamente olvidadas. De todos los principios, sólo se retienen tres cosas: la definición de la fuerza obrando en cada instante sobre un punto material libre, animado de un movimiento de dirección conocida; la de la aceleración de ese movimiento, en intensidad el producto de la mis-

ma aceleración por una constante característica de ese punto, llamada su masa; después el principio de las velocidades virtuales, después el de Alembert, y todo en seguida se deduce naturalmente de esos solos datos. En vez de plantearlos claramente, de desarrollar naturalmente las consecuencias cuyo acuerdo constante con los fenómenos mensurables asegura mejor que cualquier otra cosa la solidez de todo el edificio, ¿por qué obstinarse, para llevar a los alumnos a él, en arrancarlos de la independencia de los movimientos simultáneos y de otras consideraciones provisorias y oscuras? La introducción en la enseñanza secundaria de nociones precisas sobre las cantidades infinitamente pequeñas y sobre el uso de las coordenadas, permitiría enunciar el principio general de las velocidades virtuales, para de él deducir demostraciones fáciles y uniformes de la composición de las fuerzas y de las primeras reglas de equilibrio. En dinámica se tratan con demasiado complacencia cuestiones de fantasía como las que implican fuerzas funciones del tiempo; por lo contrario sería necesario modelar más cuidadosamente las teorías sobre los fenómenos mecánicos de la naturaleza, en los cuales, en el fondo, no intervienen más que fuerzas que exclusivamente dependen de las posiciones de sus puntos de aplicación, y que domina el principio de la conservación de la energía.

. . . .

Mucho temo que lo que acabo de proponer no sea considerado como quimera. Los que creen que una cosa es buena solamente porque ha durado y dura todavía, sin duda, sólo mirarán con desdén mis ideas; de antemano, sólo podría ofrecerles la seguridad del mío por las suyas. Otros me leerán con más benevolencia, pero creerán que estoy engañado; si quisieran tomarse el trabajo de decirme en qué, sacaría provecho de sus críticas, o bien ensayaría refutarlas. Otros, en fin, y los creo en mayor número de lo que parece, lamentan también el pobre rendimiento de la enseñanza matemática, en relación con lo

que cuesta en tiempo y trabajo; sus votos reclaman mejor estado de cosas; honran quizá mis ideas con su aprobación, pero perciben obstáculos insuperables para toda reforma de importancia.

A los últimos les diré que si las dificultades son grandes, no por eso son invencibles, pues ellas son obra de los *hombres*, no de la naturaleza de las cosas. Son efectivamente legisladores los que dictan los programas oficiales, examinadores los que imponen sus prescripciones, las completan y las extienden por su jurisprudencia; son profesores que, en el campo desgraciadamente estrecho que tienen abierto a su iniciativa, preparan a los alumnos de acuerdo con las exigencias de los unos y de los otros. Ahora, lo que todos han hecho ayer, pueden también hacerlo mañana. Si la solución pudiera depender de ella, la industria privada la hubiera encontrado.

En Francia, todas las enseñanzas terminan en exámenes, y nada de hecho puede reformarse sin el asentimiento del legislador representado aquí por la Administración de Instrucción Pública. Es, pues, a ella que me dirigiría principalmente, para solicitar no ya la intervención del brazo secular en provecho de improvisadas innovaciones, sino un conjunto de medidas liberales que aseguren a toda novedad la posibilidad de darse a conocer y de imponerse, si hubiere lugar, por sus propios méritos. Desde luego, por la redacción de sus programas, ella se pondría en evidencia mejor todavía, si en las comisiones en que se elaboran, incluyera más ampliamente a los especialistas, esos hombres distinguidos, que sin ser del oficio, sin haberse imbuído en sus prejuicios, conocen sin embargo la materia y saben discernir lo que conviene tomar y lo que debe abandonarse, para el que no quiere hacer de ella la ocupación de toda su vida. Es evidente, por ejemplo, que si los Bachilleres en ciencias, para no hablar de los otros, no están obligados a ejercitarse en los versos latinos, en la acentuación y en los temas griegos, no es a comisiones compuestas exclusivamente de

Latinistas y de Helenistas que lo deben. Aquella comisión podría en seguida tachar de los programas oficiales todas las cuestiones que versaran sobre materias de *pura doctrina*, que no entiende todo el mundo de la misma manera, o más exactamente, que pueden ser olvidadas sin serio perjuicio para la instrucción general del candidato.

No podríamos pasarnos, por ejemplo, de una teoría cualquiera de los números inconmensurables, pero no es necesario retenerla para saberlos manejar. Cada profesor escogería, pues, libremente la suya, si tuviera la seguridad de que los alumnos no fueran nunca incomodados al respecto, y la mejor no tardaría en difundirse por todas partes. También podría la Administración, en los programas de todos los exámenes que no tuvieran el carácter de concursos, introducir cuestiones variadas, a título facultativo para los candidatos; aquellas cuestiones que ofrecieran verdadero interés serían estudiadas voluntariamente y pronto llegarían a ser clásicas. Después de haber dado a los profesores la libertad que ella puede acordar, pues las tradiciones y los prejuicios, y también la moda, son aquí los verdaderos tiranos, ¿no podría la Administración, en fin, recompensar a los que, de entre ellos, hubieran sabido usarla en provecho de los estudios? Es a sus alumnos sobre todo que beneficia un profesor hábil cuando los hace brillar en los exámenes, pero el beneficiado es el Estado cuando aquél ha hecho que la enseñanza realice un progreso real.

Sea lo que sea, he creído llenar un deber de mi modesto cargo, denunciando aquí el edificio inhospitalario y desagradable de las Matemáticas clásicas, tanto al público como a todo ministro que particularmente tuviera el deseo de elevar el nivel de esa enseñanza, y de hacer que por primera vez sean verdaderamente populares sus partes más indispensables.

XII

LA ADOPCIÓN DEL MÉTODO DE MERAY Y LAS OPOSICIONES QUE TUVO QUE VENCER

Como un homenaje a la memoria del profesor Charles Meray, (1) que con entereza y perseverancia sostuvo sus ideas sobre la reforma de los métodos de enseñanza de la geometría elemental, voy a transcribir dos artículos en los que se dan interesantes informaciones de carácter histórico y pedagógico que ponen de relieve la importancia de la obra realizada por Meray: el primero es del meritorio profesor Laisant, tan conocido en el campo científico, como por sus conferencias y publicaciones sobre las mismas cuestiones de la reforma de la enseñanza; el otro es del profesor Perrin, que con nuevos datos complementa las favorables informaciones del primero.

Es muy conveniente que nuestros jóvenes profesores de matemáticas elementales conozcan las dificultades que en Francia han tenido que vencer los promotores de la reforma de la enseñanza matemática; así se darán cuenta de que esas reformas, son el fruto de largos estudios, de mucha experiencia en el profesorado, y no de ideas improvisadas o impuestas por la autoridad administrativa como ensayo de método: apreciarán el valor intelectual y el carácter tan firme del viejo profesor de Dijon a quien no desalentaron las oposiciones, no siempre leales, de los profesores apegados a la secular tradición de Euclides, ni los repetidos desaires que sufrió de las autoridades de la enseñanza, antes de que oficialmente se reconocieran como buenos, y se recomendaran sus métodos de enseñanza de la Geometría.

(1) Meray falleció en 1911 a la edad de 76 años.

UNA EXHUMACIÓN GEOMÉTRICA

(Artículo de Laisant, publicado en la Revista L'enseignement mathematique)

Perpetuamente se encuentran en la vida asuntos extraños: no es de los que menos pueden ser considerados como tales el que paso a tratar.

Todos los que se ocupan de la enseñanza de la Geometría, y principalmente los lectores de *L'enseignement mathematique,* han seguido el movimiento digno de interés y de atención que se produce en Italia, desde hace algunos años, en el sentido de una fusión de la enseñanza de la Geometría plana y de la del espacio, de la Planimetría y de la Estereometría, para hablar un lenguaje más moderno, y mejor en mi opinión. Alguna vez he tenido la ocasión de hacer notar que la idea habría tenido predecesores, y de citar una obra de Mahistre: *Las analogías de la Geometría elemental,* 2.ª edición, 1844.

Entonces sólo de nombre, y por sus trabajos sobre el Análisis, conocia a C. Meray, profesor de la Facultad de Ciencias de Dijon, del cual nuestros lectores han podido apreciar los esfuerzos recientes para la propagación del Esperanto, cuestión que en alto grado, aunque indirectamente, interesa al mundo matemático. Esta circunstancia me puso con él en relaciones directas y, como consecuencia, en 1900, cambiamos una correspondencia bastante frecuente. En el curso de esa correspondencia me habló de un libro por él publicado en 1874, titulado *Nuevos elementos de Geometría,* del cual yo ignoraba hasta el título. La lectura de esta obra fué para mí una verdadera revelación, y me causó una profunda sorpresa. No solamente, desde aquella época, Meray (desconociendo la olvidada tentativa de Mahistre), llevaba de frente el estudio del plano y del espacio, sino que introducía en esta parte de la enseñanza una modificación tan profunda que hubiera debido preocupar a todos los espíritus que deben seguir las cuestiones de pedagogía matemática. En vez

de eso, parece que nadie se hubiera dado cuenta de ello; y el título de *exhumación*, colocado como título de este artículo, no es más que la exacta expresión de la verdad.

Si se tratara de un oscuro institutor, perdido en el fondo de la campaña, se explicaría el hecho, si no se justificara: aun un hombre de genio puede permanecer ignorado por sus contemporáneos.

Pero no era ese el caso. Profesor desde hacía seis años en la enseñanza superior, desde largo tiempo autor de memorias notables, de una obra de fondo sobre Análisis matemático, cuyo alcance se mostró considerable, actualmente. Correspondiente del Instituto, en posesión de una reputación que franqueó las fronteras, Meray era ya en 1874 un sabio que había hecho sus pruebas; y, aun no compartiendo sus ideas, se piensa que ellas por lo menos tienen el derecho a la discusión: No fué así: se enterraron pura y simplemente. ¿Por qué? Ensayaré de indicarlo más adelante. En cuanto al presente, intento hacer saber lo que era ese libro, al cual el autor había consagrado casi dos años de trabajo. Prevengo que no haré un examen imparcial, pues, sobre la cuestión de que se trata estoy de acuerdo con el autor, talmente he sido seducido por la altura de sus vistas y por el bello andamiento de su obra. Y es tanto más de tenerse en cuenta que no ocurre lo mismo para todas sus ideas pedagógicas, en particular en lo que se refiere a ciertos puntos secundarios de la enseñanza de la Aritmética o del Algebra; esos ligeros desacuerdos que quizá deriven de simples malentendidos no podrían, por otra parte, atenuar mi admiración por su bella inteligencia, ni mi simpatía por su carácter.

Puede afirmarse que los *Nuevos elementos* son, en toda la extensión de la palabra, una obra de conciencia: poco tiempo necesita el lector para notarlo. *El primer origen de las verdades geométricas es incontestablemente experimental*, dice el autor en el prefacio. Y partiendo de ahí, no titubea en establecer como axiomas, y muy claramente,

un gran número de proposiciones indemostrables que muchos autores clásicos se émpeñan en demostrar. Lo hace a medida que avanza, exponiendo al mismo tiempo las verdades que se refieren al plano y al espacio, manteniendo, sin embargo un método muy ordenado y muy racional a pesar de su atrevimiento. Marcha decididamente, sin titubear, no se agota en sutilezas, y no disfraza los axiomas: por lo contrario, los pone muy en evidencia, con caracteres muy aparentes. Dividida en pequeños capítulos, la obra no se parece a la clásica ordenación de Euclides; sólo que el que la estudia deberá poner en actividad su juicio más bien que su memoria, y muy pronto estará en posesión de hechos y no de palabras. Después de algunas generalidades y de algunas primeras nociones sobre la recta y el plano, aborda el paralelismo, escollo tradicional de los escolásticos de la Geometría: para dar la noción del paralelismo utiliza el movimiento de traslación; y aunque haga estremecer de indignación a ciertos admiradores de los griegos, encuentro que el autor tiene mil veces razón, y que cada alumno comprenderá mejor el movimiento del cajón de una mesa y el rol de las deslizaderas, que las refinadas digresiones sobre el famoso Postulado.

La perpendicularidad (con la noción de las rotaciones), la medida de los segmentos, la de los ángulos, el estudio de los triángulos, las longitudes curvas, las áreas, los volúmenes vienen en seguida y nos conducen a dos capítulos que, evidentemente, desempeñan un rol capital en el pensamiento general del autor: la semejanza (precedida de la homotecia) y las diversas simetrías. Los triedros, el círculo, los polígonos regulares, las superficies cilíndricas, cónicas, de revolución, la teoría de la esfera y de las figuras esféricas terminan el libro, seguido de un suplemento, en forma de notas sobre ciertos puntos que los programas le obligan a no olvidar, pero que no entran directamente en su plan. Tanto en el detalle como en el conjunto, el libro es claro y conciso, la lectura es corriente

y agradable; en ella se encuentra los elementos de una instrucción más sólida y más extensa, aunque más rápida, que por la vía habitual; y tal método no tendría menos aplicación en la enseñanza primaria, que en la secundaria en todos sus grados.

Aún pecando de aridez, estaba obligado a dar la enumeración que precede; por sí misma enseñará quizá muy poco; pero ella bastará para demostrar cuánto se aparta el autor de los senderos recorridos, y por lo mismo cómo despierta la curiosidad del lector. Si éste es un espíritu libre, creo que deseará conocer la obra más íntimamente; entonces experimentará su encanto, como yo lo he experimentado, y reconocerá los beneficios de la revolución que prepara Meray en la enseñanza de la Geometría. Si se me considera herético cuando me expreso así, ¡que el que ha conservado un dulce recuerdo del tiempo en que estudió el V libro por primera vez me arroje la primera piedra!

Más o menos he dicho lo que es la obra: voy a ensayar decir cual fué su historia.

A propósito repito que los *Nuevos elementos de Geometría* fueron publicados en 1874, y que Meray trabajó en ella dos años. Lleno de fe en la justeza de sus ideas, en la utilidad de su tentativa, vió con satisfacción que a su alrededor se empezaba a introducir su método en la enseñanza; se ensayaron en la escuela primaria superior de Dijón, y de ellos volveré a ocuparme en seguida: era antes de 1880; pero no se había contado con la intervención administrativa. Pudo verse un funcionario (no lo nombraré, murió: dejemos en paz su memoria) arrancar el libro de la mano de consumados maestros que, después de haberlo utilizado con éxito durante tres años, le suplicaban que autorizara la continuación de la prueba. Otro funcionario, igualmente fallecido, que tampoco quiero nombrar, se declaraba hostil, *porque no admitía el movimiento en Geometría.* Era ese, sin embargo, una persona de verdadera inteligencia, un sabio, y un carácter benevolente

y recto; lo que demuestra hasta qué punto los hábitos adquiridos pueden paralizar en los mejores toda independencia de razonamiento!

« El olvidaba, me escribía no hace muchos días Meray, « que la noción de superposición posible de dos figuras « implica la de un cierto movimiento capaz de realizarlo. « Olvidaba que la famosa rotación de un semiplano alre- « dedor de la charnela, es cosa muy distinta del reposo, « y de la Geometría exclusivamente plana. Olvidaba la « generación práctica de las superficies de revolución. Ol- « vidaba... ¡todo! »

El autor ensaya accidentalmente dirigirse a la prensa periódica matemática, a las oficinas de la Instrucción pública. Sufrió rechazos y desdenes en todas partes, salvo de algunas personas cuya voz no era bastante influyente para hacerse oir útilmente. Es preciso que el silencio haya sido sabiamente organizado, para que al cabo de 26 años, sólo deba yo al azar el conocimiento de una tentativa tan atrevida y la existencia de un libro que tenía *(y que tendrá)* por resultado la renovación completa de nuestra enseñanza geométrica. Ya sería más que tiempo de abandonar los caminos impracticables en los que nos empantanamos desde hace siglos, para encaminarnos por la gran vía de la razón y del buen sentido.

Un hecho viene a reforzar nuestra esperanza; es que la única edición de los « *Nuevos elementos de Geometría* » está casi agotada. Después de haber vendido quizá veinte o treinta ejemplares en veinte años, hemos sabido que el actual depositario, Gauthier-Villars, recibía numerosos pedidos desde hace algún tiempo (principalmente de la región del Este). Parece que hubiera en eso un síntoma feliz, que la excomunión mayor de que el autor y la obra fueron objeto tendiera a terminar, que la funesta resistencia de que son responsables el espíritu de rutina y la centralización extremada cesarán muy pronto, y que una reedición de los « *Nuevos elementos de Geometría* » se impondrá al mismo, tiempo que su ensayo pedagógico libre e imparcial.

He hecho alusión más arriba al ensayo hecho, en los cursos de los años 1876 — 1877 — 1878, en la escuela primaria superior de Dijón. El informe que sobre él hizo el profesor Chancenotte lo tenemos a la vista, y, para demostrar que no se trata de una fantasía de imaginación, voy a reproducir de él algunos párrafos. Después de haber explicado las condiciones en las cuales fué conducido a ese ensayo, con el fin de poder dar a los candidatos a la Escuela de Artes y Oficios de Chalons algunas nociones de dibujo industrial y de Geometría descriptiva, Chancenotte continúa como sigue:

« Al fin del año escolar 1875 - 1876, algunos ejempla« res de la obra de Meray fueron dados como premio a « los futuros candidatos a la escuela de Chalons. Al ini« ciar el curso siguiente desarrollé las lecciones enseñando « la Geometría plana en su forma habitual, pero expo« niendo al mismo tiempo los conocimientos referentes « a los planos y rectas en el espacio, tal como se expo« nen en los primeros capítulos de los *Nuevos elementos de « Geometría*; a este estudio secundario, dedicaba una y me« dia horas por semana. Resultó que el 15 de Noviembre, « es decir *seis semanas solamente después de iniciar mi curso « de Geometría,* los alumnos se encontraron en condiciones « de recibir sus pequeñas lecciones de Geometría descrip« tiva; por ese medio éstas pudieron prolongarse por más « tiempo y producir mejores resultados.

« El fin se había alcanzado, y desde entonces el libro « de Meray ofrecía para los alumnos una utilidad menos « inmediata; no había necesidad, además, de llevar la « perturbación a sus espíritus, obligados por otros proce« dimientos en la mayor parte del curso; me limité, pues, « a hacer leer con cuidado el resto de la obra; no exigía « que fueran retenidas las demostraciones, bastándome que « fueran comprendidas; este resultado era obtenido sin se« rias dificultades.

« El encadenamiento nuevo de los teoremas, la forma « general de las demostraciones mantenían sin duda la

« curiosidad de los alumnos y sostenían su atención; pero, « sobre todo se sorprendían al encontrar a cada paso, tan « pronto una verdad general de la que el método tradi- « cional sólo les había enseñado casos particulares, como « un capítulo relacionando y resumiendo en su espíritu « nociones similares que en aquel se encuentran esparci- « das; porque los otros tratados, aunque en uso, los dise- « minaban en veinte sitios distintos. Esta poderosa sín- « tesis ofrecida a su inteligencia no contribuía a darles el « sentido y el gusto de los asuntos geométricos. »

Esta experiencia demasiado corta, en opinión de Chancenotte, fué detenida de golpe por incidentes de *orden administrativo*, usando el encantador eufemismo que él emplea. Los resultados fueron excelentes, pero reconoce que las condiciones del ensayo fueron demasiado precarias para permitirle formular conclusiones completas; hubiera sido necesario dirigirse, como dice, a alumnos que todavía no tuvieran ninguna noción de Geometría y que exclusivamente pudieran estudiar esta ciencia siguiendo los nuevos métodos. Sin embargo, pudo formular su opinión sobre esos métodos, y llegar a las siguientes conclusiones:

1.º No solamente son accesibles al espíritu del niño, sino que ellos no exigirían de éstos una suma de esfuerzos superior a la que reclaman los métodos que la tradición ha legado a la enseñanza. Si lo contrario parece a algunos profesores, y si no se apresuran a adoptar esos métodos, es desde luego porque están o se creen estar ligados por los programas; es, sobre todo, porque deben, particularmente para los primeros capítulos, hacer tabla rasa de lo que han aprendido y siempre enseñado, para entrar en las nuevas intuiciones fundamentales, y dejarse conducir por ellas. Hay en eso un muy real esfuerzo que hacer, que exige muchas atentas lecturas.

2.º Esos métodos conducen muy pronto a las aplicaciones. Su adopción haría desaparecer el insensato procedimiento indicado por los programas de que se encuentre continuamente adelantada la enseñanza del dibujo geomé-

trico, a veces en un año entero, al de la Geometría teórica.

En cuanto al libro mismo, en lo que concierne a la enseñanza primaria, se le puede considerar un poco conciso en sus demostraciones, demasiado vasto en sus desarrollos; pero su ordenación es muy buena, la síntesis notablemente hecha: « nos conduce rectamente al fin, sin « detenerse en esa multitud de insignificancias que au« mentan el volumen de la mayor parte de los otros tra« tados y embarazan la memoria sin provecho real para « el desarrollo intelectual y la instrucción de sus alumnos. « Su empleo permitiría hacer más y mejor, aunque en « menos tiempo.

« Como las verdades resultantes sólo de la experiencia « son en ese libro bastante numerosas (puesto que su ori« gen no ha sido disimulado) y como muchas de ellas « todavía no han llamado la atención del niño, un pequeño « material, muy simple por otra parte, sería muy útil para « que aquéllas fueran aceptadas con evidencia; el mismo « material facilitaría además la inteligencia de los pri« meros capítulos, hechos un poco difíciles, tanto por su « abstracción como por la condensación de muy gran nú« mero de hechos en un pequeño número de páginas. »

Ahora que he puesto a la vista de todo lector de buena fe este documento tan claro, tan mesurado, tan conscientemente imparcial, deseo que el escándalo de los incidentes de *orden administrativo* no se reproduzca, y que la experiencia, tan lamentablemente interrumpida, pueda ser reanudada después de un cuarto de siglo. Pido, para honor de la enseñanza, que el espíritu de rutina y de revuelta contra todo progreso no venga a detener indefinidamente el desarrollo intelectual de la juventud.

No es posible que por más tiempo permanezcamos sin reanudar el ensayo de 1876 - 1878. En las escuelas primarias superiores, en los colegios, en los liceos, donde se quiera, es muy fácil introducir la nueva enseñanza, limitada a algunas clases. Que se planteen las siguientes

preguntas: ¿El método de Meray pone en actividad la inteligencia más que la memoria? ¿Utiliza mejor el tiempo? ¿Conduce, más rápidamente que el método en vigencia, a las aplicaciones necesarias? ¿Permite un acuerdo más armonioso entre las diferentes partes de los programas? ¡Y, desde el fin del primer año, se verá si las conclusiones no concuerdan con las de Chancenotte!

¿Qué podría objetarse? ¿La tradición? Pero, es precisamente esta nefasta tradición cuya acción impide a la infancia y a la juventud interesarse en estudios que son atrayentes en el fondo, y que con la mayor frecuencia sólo dejan en el espíritu un recuerdo de disgusto, de esfuerzos inútiles y de vana fatiga. ¿El respeto debido a la memoria de los Griegos y de Euclides en particular? Pero, si actualmente pudiera revivir Euclides, se asociaría a nuestros esfuerzos; tanto valdría rehusarse a emplear la artillería porque ni César ni Aníbal se sirvieron de ella. ¿La preocupación de conservar a la Geometría su gran pureza lógica, deducida de la experiencia? Pero esa pureza no es más que un artificio, los axiomas experimentales pululan por todas partes, y es por una especie de hipocresía voluntaria que se les disimula, en lugar de ponerlos francamente en evidencia.

En el fondo, la cuestión planteada por Meray, hace 26 años, es aún más vasta de lo que a primera vista parece, pues debe extenderse a las otras ramas de las matemática y se plantea como sigue: ¿La enseñanza matemática debe tener por objeto fortificar la inteligencia y preparar para las aplicaciones? ¿Es por lo contrario un medio de selección, para exámenes y concursos, medio excelente, porque tal estudio está lleno de dificultades, porque exige prodigiosos esfuerzos de memoria?

El profesor Elie Perrin, de París, publicó en 1903 un artículo titulado « *El método de Meray para la enseñanza de la Geometría* » en el que aparecen nuevos testimonios de profesores favorables a la reforma iniciada por Meray: transcribiré los principales párrafos.

En un informe, Billiet, profesor de matemáticas de la Escuela normal de profesores de Auxerre (1900), dice lo que sigue, refiriéndose a la enseñanza clásica de la geometría:

« La iniciación es larga, las demostraciones fastidiosas « y con frecuencia llenas de sutilezas: el espíritu de los « alumnos está sometido a un ergotismo incesante, sino « pedantesco; con el pretexto de demostrarlo todo, se « pierde el tiempo en verdaderas nimiedades persiguiendo « un vano rigor; un estudio hecho en tal forma, lejos de « dar flexibilidad a la inteligencia, acaba muy pronto por « anquilosarla. »

En seguida pone de manifiesto la incoherencia de los programas de las escuelas normales, llevando al segundo año nociones geométricas necesarias para la ejecución del dibujo geométrico impuesto desde el primer año. El trabajo manual se presta a análogas observaciones que las hechas para el dibujo.

Para establecer el orden en lugar de ese caos, el profesor Billiet solicitó y obtuvo, desde 1898, la autorización para reformar su enseñanza mediante la introducción de los *Nuevos elementos de Geometría* de Meray.

La experiencia fué renovada en 1899. « Las lecciones, « decía el profesor Billiet, eran animadas; los alumnos « se interesaban vivamente por el nuevo método. » Después, la tentativa se extendió más, y los alumnos de primer año siguieron el nuevo curso. « Avanzan de sorpresa « en sorpresa », agrega todavía; « su inteligencia se des« pierta y se abre muy fácilmente en los nuevos aspectos « que se les presentan; todos se sorprenden del encade« namiento de los teoremas y de la sencillez de las de« mostraciones. »

En resumen, el propesor Billiet concluye formalmente en favor del método de Meray, manifestando según su propia observación que él hace intervenir « la inteligencia más bien que la memoria ».

Una carta del profesor Mironneau, director de la nom-

brada escuela de Auxerre hace constar que « el profesor « y los alumnos se declaran igualmente satisfechos del « nuevo método.» Una sola inquietud manifiestan algunos de los profesores que consultó, y es lo referente a los exámenes. « A pesar del respeto que es inherente a un « método admirado desde hace más de dos mil años, es « difícil no dejar de manifestar que ese mismo respeto « ha hecho de él una especie de formulario sagrado que « expone a adormecer el espíritu en lugar de despertarlo. »

El profesor Billiet presentó en 1901 un segúndo informe, el cual termina por las siguientes conclusiones:

« 1.º La enseñanza simultánea de la geometría plana « y de la geometría del espacio produce una sensible « ganancia de tiempo sobre la duración total de la ense- « ñanza geometrica;

« 2.º El nuevo método restablece la concordancia en « muchos puntos, entre las diversas materias del programa « de matemáticas y las de las enseñanzas teóricas y prác- « ticas que con aquellas se relacionan;

« 3.º Ese método pone en actividad la inteligencia de « los alumnos más bien que su memoria;

« 4.º Ese método habitúa a los alumnos a que piensen « por sí mismo y no solamente por medio del profesor « o del libro. »

Termina el informe contestando a algunas objeciones formuladas por profesores: 1.º Dificultades experimentadas por los alumnos y por los profesores; 2.º forma concisa, demasiado sabia de la obra; 3.º la obra no es accesible a las escuelas primarias superiores; 4.º la obra de Meray encierra algunas nociones de trigonometría; 5.º, en todos los exámenes los alumnos son interrogados siguiendo el método antiguo.

En su carta de remisión del informe al rector, Mironneau expone que sus observaciones, tanto sobre el valor educativo del método como por sus resultados puramente geométricos, han confirmado las conclusiones de su precedente informe: « 1.º Haciendo el desarrollo si-

« multáneo de la geometría plana y de la geometría del
« espacio, el método de Meray aproxima las verdades co-
« rrespondientes y suprime las repeticiones, resultando
« esa concesión luminosa de la cual se declaran satisfe-
« chos los alumnos y que, en suma, representa tiempo
« ganado;

« 2.º Esta marcha paralela del plano y del espacio per-
« mite establecer, desde el primer año, entre los progra-
« mas de geometría, de dibujo lineal y de trabajo ma-
« nual, la concordancia que corresponde a una organiza-
« ción pedagógica racional;

« 3.º Finalmente, la fusión de la geometría plana y de
« la geometría del espacio permite aproximaciones ingenio-
« sas y sugestivas entre nociones que la geometría euclí-
« dea mantiene cuidadosamente separadas. De esas apro-
« ximaciones resulta para los alumnos la clara visión del
« conjunto, la visión sintética, condición necesaria de toda
« ciencia. Así, el alumno domina su curso, en vez de ser
« abrumado por él. Y, en fin, estamos particularmente se-
« ducidos por la facilidad con que los alumnos, *encuentran,*
« para una cuestión dada, soluciones originales. Propuesto
« un ejercicio o un problema, los alumnos *buscan,* y en
« lugar de considerar la buena solución como simple re-
« sultado del azar o del presentimiento, en lugar de acu-
« dir exclusivamente a su memoria para encontrar casos
« análogos, proceden a una verdadera investigacion cien-
« tífica. Así es, que una misma cuestión con frecuencia es
« resuelta de varias maneras, entre las cuales es muy in-
« teresante hacer distinguir en seguida la solución más
« lógica, la más simple, o la más elegante. El método de
« Meray es, pues, *esencialmente educativo* ».

XIII

LAS IDEAS DE HENRI POINCARÉ SOBRE EL MÉTODO EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Los principios y los métodos que se aplican en la enseñanza moderna de las matemáticas elementales, como ha podido verse en lo que llevo publicado en este libro, cuentan con el apoyo de los sabios, pedagogistas y profesores de matemáticas más notables: por la elevada posición de su autor en el mundo científico, por su indiscutible autoridad en las cuestiones de enseñanza, merece ser conocida por nuestro profesorado de enseñanza secundaria una conferencia que el eminente sabio Henri Poincaré dió en París en 1904: léase con atención y se verá la conformidad de ideas de Poincaré con las que ya figuran expuestas y seguiré exponiendo en este libro, como directrices de la moderna metodología matemática.

De la notable conferencia de H. Poincaré sólo he tomado las partes que más relación tienen con la enseñanza de las matemáticas elementales: los lectores que tengan interés de conocer íntegramente el trabajo de Poincaré pueden consultar *L'Enseignement mathematique* (1904), o bien el libro que el eminente sabio publicó con el título *Science et methode* (Biblioteca de filosofía científica), en el cual figura la conferencia como capítulo II del libro II.

LAS DEFINICIONES GENERALES EN MATEMÁTICAS, POR HENRI POINCARÉ, MIEMBRO DEL INSTITUTO, PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE PARÍS [1]

¿Qué es una buena definición? Para el filósofo, o para el sabio, es una definición que se aplica a todos los ob-

(1) Henri Poincaré murió en 1912.
(Extracto de una conferencia leída en el Museo Pedagógico de París)

jetos definidos y sólo se aplica a ellos; es la que satisface a las reglas de la lógica. Pero, en la enseñanza, no es eso; una buena definición, es la que comprenden los alumnos.

¿Cómo es que hay tantos espíritus que se rehusan a comprender las matemáticas? ¿No hay en eso algo paradojal? Ved una ciencia que sólo recurre a los principios fundamentales de la lógica, al principio de contradicción, por ejemplo, a lo que, por decirlo así, constituye el esqueleto de nuestro entendimiento, a lo que no podría despojarse sin cesar de pensar, y ¡que haya personas que la encuentren oscura! y aún que ellas sean la mayoría! Que ellas sean incapaces de inventar, pase; pero que no comprendan las demostraciones que se les exponen, que permanezcan ciegas cuando les presentamos una luz que parece brillar con puros destellos, es lo que nos parece absolutamente prodigioso.

Y, sin embargo, no hay necesidad de grande experiencia en los exámenes para saber que esos ciegos son absolutamente seres de excepción. Existe en ésto un problema que no es fácil de resolver, pero que debe preocupar a todos los que quieran dedicarse a la enseñanza.

¿Qué es comprender? ¿Tiene esta palabra el mismo significado para todo el mundo? ¿Comprender la demostración de un teorema, es examinar sucesivamente cada uno de los silogismos de que ella se compone y comprobar que es correcto conforme a las reglas? De la misma manera, ¿comprender una definición, es solamente reconocer que se sabe ya el sentido de todos los términos empleados y comprobar que ella no implica ninguna contradicción?

Sí, para algunos; cuando hayan hecho esa comprobación, dirán: he comprendido. No, para el mayor número. Casi todos son mucho más exigentes, quieren saber, no solamente si todos los silogismos de una demostración son correctos, sino por qué ellos se encadenan en tal orden, más bien que en tal otro.

Hasta tanto les parecen engendrados por el capricho y no por una inteligencia constantemente consciente del fin que quiere alcanzar, no creen haber comprendido.

Sin duda no se dan bien cuenta ellos mismos de lo que piden y no sabrían formular su deseo, pero si no se sienten satisfechos, experimentan vagamente que algo les falta. ¿Qué sucede entonces? Al principio perciben las evidencias que se ponen a su vista; pero como ellas sólo están unidas por un hilo demasiado ténue a las que les preceden y a las que les siguen, pasan sin dejar trazas en su cerebro; de inmediato son olvidadas; iluminadas por un instante, recaen de inmediato en una noche eterna. Cuando hayan avanzado más, ni siquiera verán esa luz efímera, puesto que los teoremas se apoyan unos sobre otros, y los que serían necesarios han sido olvidados; es así que llegan a ser incapaces para comprender las matemáticas.

No es siempre la culpa de su profesor; con frecuencia su inteligencia, que necesita percibir el hilo conductor, es demasiado perezosa para buscarlo y para encontrarlo. Pero para venir en su auxilio, es desde luego necesario que comprendamos bien lo que les detiene.

Otros se preguntan siempre para qué sirve eso: ellos no habrán comprendido, si alrededor ellos no encuentran, en la práctica o en la naturaleza, la razón de ser de tal o cual noción matemática. Bajo esta palabra quieren poner una imagen sensible; es preciso que la definición evoque esta imagen, que a cada etapa de la demostración la vean transformarse y evolucionar. Sólo con esta condición comprenderán y recordarán. Esos se ilusionan ellos mismos; no escuchan los razonamientos, miran las figuras; se imaginan haber comprendido y no han hecho más que ver.

¡Qué tendencias diversas! ¿Deben combatirse? ¿Debemos utilizarlas? Y si quisiéramos combatirlas, ¿cuál deberíamos favorecer? ¿Es a los que se conforman con la lógica pura que corresponde demostrar que ellos sólo

han visto una faz de las cosas? ¿O bien hay que decir a los que no se satisfacen tan fácilmente que lo que reclaman no es necesario?

En otros términos: ¿debemos compeler a los jóvenes a que cambien la naturaleza de su espíritu? Semejante tentativa sería vana; no poseemos la piedra filosofal que nos permitiría trasmutar unos en otros los metales que se nos confia; todo lo que podemos hacer es trabajarlos acomodándonos a sus propiedades.

Muchos niños son incapaces de llegar a ser matemáticos, a los cuales, sin embargo, debe enseñarse las matemáticas; y los mismos matemáticos no están todos fundidos en el mismo molde. Basta con leer sus obras para distinguir entre ellos dos clases de espíritus: los lógicos como Weierstrass, por ejemplo, los intuitivos como Riemann. Iguales diferencias existen: entre los estudiantes. Unos prefieren tratar sus problemas «por el análisis», como dicen, los otros «por la geometría».

3. Puesto que la palabra «comprender» tiene varios significados, las definiciones que serán mejor comprendidas por los unos no serán las que convendrán a los otros. Tenemos las que tratan de hacer nacer una imagen, y aquellas en que nos limitamos a combinar formas huecas, perfectamente inteligibles, pero puramente inteligibles, que la abstracción ha privado de toda materia.

No sé si es necesario citar ejemplos. Citaré, sin embargo, y la definición de las fracciones va a suministrarnos un ejemplo extremo. En las escuelas primarias, para definir una fracción se corta una manzana o una torta; se corta con el pensamiento, bien entendido, y no en realidad, pues no supongo que el presupuesto de la enseñanza primaria permita semejante prodigalidad. En la Escuela normal superior, por lo contrario, o en las Facultades, se dirá: una fracción, es el conjunto de dos números enteros separados por una raya horizontal; se definirá por medio de convenciones las operaciones que pueden hacerse con esos símbolos; se demostrará que las

reglas de esas operaciones son las mismas que en el cálculo de los números enteros, y se comprobará, en fin, que ejecutando, según esas reglas, la multiplicación por el denominador, se vuelve a encontrar el numerador. Eso está bien porque nos dirigimos a jóvenes, de antemano familiarizados con la noción de las fracciones a fuerza de haber dividido manzanas u otros objetos, y cuyo espíritu afinado por una fuerte educación matemática, ha llegado, poco a poco, a desear una definición puramente lógica. Pero, ¿cuál sería el aturdimiento de un principiante si se quisiera darle la misma definición?

. . . .

Estamos en una clase de Cuarta (3.er año); el profesor dicta; el círculo es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto interior llamado centro. El buen alumno escribe esta frase en su cuaderno, el malo dibuja en él muñecos; pero ni uno ni otro han comprendido; toma entonces el profesor la tiza y traza un círculo en el pizarrón.

«¡Ah! piensan los alumnos, hubiera dicho en seguida! que « un círculo es una figura redonda y hubiéramos comprendido inmediatamente ». Sin duda, la razón corresponde al profesor. La definición de los alumnos de nada hubiera servido, puesto que ella no hubiera podido darles el hábito saludable de analizar sus concepciones. Pero sería necesario mostrarles que ellos no comprenden lo que creen comprender, conducirlos a que se den cuenta de lo grosero de su concepto primitivo, a que ellos mismos deseen que se les depure y desbaste.

. . . .

Nuestros padres creían saber qué es una fracción, qué es la continuidad o qué es el área de una superficie curva; somos nosotros los que hemos notado que ellos no lo sabían: creen también que lo saben los alumnos cuando empiezan a estudiar seriamente las matemáticas. Sí, sin otra preparación, les dijera: « No, vosotros no lo « sabéis; lo que creéis comprender, no lo comprendéis;

«es necesario que os demuestre lo que os parece evi- «dente»; y si en la demostración me fundo en premisas que les parece menos evidente que la conclusión, ¿qué pensarán esos desgraciados? Creerán que la ciencia matemática es un montón arbitrario de sutilezas inútiles; o bien se fastidiarán, o bien tomarán aquella ciencia como un juego de ingenio análogo al de los sofistas griegos.

Por lo contrario, más tarde, cuando el espíritu del alumno, familiarizado con el razonamiento matemático haya madurado por una larga frecuentación del estudio, las dudas nacerán por sí mismas, y entonces será bien recibida vuestra demostración. Ella despertará otras nuevas, y las cuestiones se plantearán sucesivamente al niño, como se plantearon sucesivamente a nuestros padres, hasta que el rigor perfecto sólo pueda satisfacerlo. No basta dudar de todo, hay que saber por qué se duda.

8. El fin principal de la enseñanza matemática es el desarrollo de ciertas facultades del espíritu y entre ellas no es la menos preciosa la intuición. Es por ella que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real, y aún cuando las matemáticas puras pudieran prescindir de ella, siempre tendríamos que emplearla como recurso para llenar el abismo que separa el símbolo de la realidad. El práctico la necesitará siempre, y para un geómetra puro debe haber cien prácticos.

El ingeniero debe recibir una educación matemática completa; pero ¿para qué debe servirle? para ver los diversos aspectos de las cosas y para verlos pronto: no tiene tiempo para ocuparse de las nimiedades. Es preciso que en los objetos físicos concretos que se le ofrecen reconozca en seguida el punto en que podrán aplicarse los útiles matemáticos que hemos puesto en sus manos. ¿Cómo podría aplicarlos si entre áquéllos y éstos dejáramos este profundo abismo abierto por los lógicos?

9. Al lado de los futuros ingenieros, otros alumnos, menos numerosos, deben a su vez llegar a ser profesores; es preciso, pues, que penetren hasta el fondo: un

conocimiento profundo y riguroso de los primeros principios les es, ante todo, indispensable. Pero no es esa una razón para no cultivar en ellos la intuición; pues se formarían una idea falsa de la ciencia si sólo la miraran de un solo lado, y, por otra parte, no podrían desarrollar en sus alumnos una cualidad de que carecían ellos mismos.

Aún para el geómetra puro, esa facultad es necesaria: es por la lógica que se demuestra y es por la instrucción que se inventa. Saber criticar es bueno, pero saber crear es mejor. El saber reconocer que una combinación es correcta, poco vale si no poséeis el arte de elegir entre todas las combinaciones posibles. La lógica nos enseña que sobre tal o cual camino estamos seguros de no encontrar obstáculos, pero no nos dice cual de ellos conduce al fin. Para ésto es necesario que el fin se vea de lejos, y la facultad que nos enseña a ver es la intuición. Sin ella, el geómetra sería como un escritor aferrado a la gramática, pero que no tuviera ideas. Ahora ¿cómo puede desarrollarse esta facultad, si desde que ella se manifiesta se la rechaza y se la proscribe, si se enseña a desconfiar de ella antes de saber lo que de útil puede dar?

Y aquí permitidme abrir un paréntesis para insistir sobre la importancia de los deberes escritos. Las composiciones escritas no tienen, quizá, bastante importancia en ciertos exámenes, en la Escuela Politécnica, por ejemplo. Se me dice que ellos cerrarían la puerta a muy buenos alumnos que saben muy bien su curso, que lo comprenden bien, y que, sin embargo, son incapaces de hacer de él la menor aplicación. He dicho ya que la palabra comprender tiene varios significados: aquellos sólo comprenden de la primera manera, y acabamos de ver que esto no basta para hacer un ingeniero, ni para hacer un geómetra. Y bien, puesto que hay que elegir, prefiero los que comprenden completamente.

10. Pero ¿el arte de razonar justo no es también una cualidad preciosa que el profesor de matemáticas debe,

ante todo, cultivar? Tengo buen cuidado de no olvidarlo: de eso hay que preocuparse desde el principio. Deploraría que la geometría degenerase en una especie de taquimetría de baja estofa, y de ninguna manera me hago solidario de las doctrinas extremas de algunos Oberlehrer alemanes. Pero se tienen bastantes ocasiones para ejercitar a los alumnos en el razonamiento correcto, en las partes de las matemáticas en que los inconvenientes que he señalado no se presentan. Se tienen largos encadenamientos de teoremas en los que la lógica ha reñido desde el principio, y por decirlo así, de un modo absolutamente natural, en los que los geómetras nos han dado modelos que constantemente habrá que imitar y admirar.

Es en la exposición de los primeros principios que es preciso evitar demasiada sutileza; allí sería más chocante e inútil, por otra parte. No todo se puede demostrar ni es posible definirlo todo, y siempre habrá necesidad de acudir a la intuición; nada importa que se haga un poco antes o un poco más tarde, o que se pida algo más o algo menos, con tal que sirviéndose constantemente de las premisas que ella nos ha suministrado, aprendamos a razonar justo.

11. ¿Es posible llenar tantas condiciones opuestas? ¿Es posible, en particular, cuando se trata de dar una definición? ¿Cómo encontrar un enunciado conciso que a la vez satisfaga a las reglas intransigentes de la lógica, a nuestro deseo de comprender el sitio de la nueva noción en el conjunto de la ciencia, a nuestra necesidad de pensar con dos imágenes? Lo más frecuentemente no se le encontrará y es porque no basta con enunciar una definición; es preciso prepararla y justificarla.

¿Qué quiero decir con ésto? Sabéis que con frecuencia se ha dicho: toda definición implica un axioma, puesto que ella afirma la existencia del objeto definido. La definición, pues, no estará justificada del punto de vista puramente lógico, sinó cuando se haya *demostrado* que ella no implica contradicción, ni en los términos ni con las verdades anteriormente admitidas.

Pero no es bastante; la definición se nos enuncia como una convención; pero, la mayor parte de los espíritus se rebelan si se la queréis imponer como una convención *arbitraria*. Sólo se tranquilizarán cuando hayáis respondido a numerosas cuestiones.

. . . .

Todas las veces que sea posible, la justificación precederá al enunciado y lo preparará; se conducirá al enunciado general mediante el estudio de algunos ejemplos particulares.

Otra cosa todavía; cada una de las partes del enunciado de una definición, tiene por objeto distinguir el objeto que se define de una clase de objetos vecinos. La definición no será comprendida sino cuando hayáis mostrado, no solamente el objeto definido, sino también los objetos vecinos de los cuales conviene distinguirlo, que hayáis hecho percibir la diferencia y que, explícitamente hayáis agregado: es por ésto que al enunciar la definición he dicho ésto o aquéllo.

Pero es tiempo de salir de las generalidades y de examinar cómo los principios un poco abstractos que acabo de exponer pueden ser aplicados en aritmética, en geometría, en análisis y en mecánica.

12. *Aritmética.*—No debe definirse el número entero; en cambio, se definen generalmente las operaciones con los números enteros; creo que los alumnos aprenden esas definiciones de memoria y que no comprenden su sentido. Hay para ésto dos razones: desde luego se las hacen estudiar demasiado temprano, cuando su espíritu no experimenta todavía necesidad de tales definiciones; después, esas definiciones no son satisfactorias del punto de vista lógico. Para la adición no podría encontrarse una buena, simplemente porque hay que detenerse y que no es posible definirlo todo. No es definir la adición el decir que ella consiste en agregar. Todo lo que puede hacerse, es partir de cierto número de ejemplos concretos, y decir: la operación que acabamos de hacer se llama adición

Diferente es en cuanto a la sustraccion: puede definirse lógicamente como la operación inversa de la adición; pero, ¿es por ahí que debe empezarse? Aquí también debe comenzarse con ejemplos y mostrar con esos ejemplos la reciprocidad de ambas operaciones; así se preparará la definición y se justificará.

Y lo mismo, también, podemos decir de la multiplicación; se tomará un ejemplo particular; se hará ver que puede resolverse adicionando varios números iguales entre sí; en seguida se hará observar que se llega más pronto al resultado por medio de una multiplicación, operación que ya saben hacer los alumnos por rutina, y la definición lógica surgirá de ahí de una manera completamente natural.

Se definirá la división como la operación inversa de la multiplicación; pero se empezará con un ejemplo tomado de la noción familiar de repartición, y con este ejemplo se mostrará que la multiplicación reproduce el dividendo.

13. Ya he hablado de las fracciones; he dicho que se inician con la torta, y hay razón para ello; es precisamente por ahí que debe empezarse. Algo más tarde, se llevará más lejos la abstracción y se introducirá la magnitud continua, cuyo prototipo es la longitud; es necesario mostrar (digo mostrar, mostrar a los ojos, y no demostrar, bien entendido) que ella es divisible al infinito, y el resto de por sí marchará. En cuanto a las definiciones más sutiles, a las que son puramente aritméticas, es preciso abandonarlas a la enseñanza superior, si se desean.

Quedan las operaciones sobre las fracciones. No hay dificultad en cuanto a la multiplicación. Lo mejor es exponer desde luego la teoría de las proporciones, y es de ella solamente que podrá salir una definición lógica; pero para hacer aceptar las definiciones que se encuentran al principio de esta teoría, es necesario prepararlas con numerosos ejemplos tomados de los problemas clási-

cos de las reglas de tres, en los que se tendrá cuidado de introducir datos fraccionarios. Tampoco habrá por qué temer familiarizar a los alumnos con la noción de proporción por medio de imágenes geométricas, sea ocurriendo a sus recuerdos, si ya han estudiado algo de geometría, sea acudiendo a la intuición directa, si no la hubieran estudiado, lo que les preparará para su estudio ulterior. Agregaré, en fin, que después de haber definido la multiplicación de las fracciones, hay que justificar esta definición, demostrando que ella es conmutativa, asociativa y distributiva, y haciendo notar bien a los oyentes que esa comprobación se hace para justificar la definición.

14. Para definir el número inconmensurable, es necesario, también, partir de la noción de magnitud continua y, entre esas magnitudes escoger un ejemplo, que sólo puede ser una longitud. Se mostrará que ciertas longitudes pueden ser expresadas por números conmensurables; que otras no pueden serlo, pero que están ligadas a las primeras por relaciones de desigualdad. Sabéis cómo esas desigualdades permiten definir las relaciones inconmensurables de modo que naturalmente se es conducido a la definición del número inconmensurable. Será bueno escoger un ejemplo en que la imposibilidad de encontrar una común medida pueda demostrarse fácilmente, y tal ejemplo clásico es $\sqrt{2}$.

Para las operaciones con los números inconmensurables, deben justificarse las definiciones de dos maneras; desde luego, del punto de vista lógico, mostrando que ellas satisfacen a las mismas reglas que las de los números enteros; y en seguida por medio de imágenes concretas que podrán tomarse de la geometría. No son difíciles de encontrar. Hay en el libro de Hilbert todo un capítulo que es una verdadera aritmética ilustrada. He hecho mis reservas respecto de este libro, pero hay en él mucho que tomar. Por lo demás, con sólo definirse el número inconmensurable a alumnos ya adelantados, comprenderán en seguida esas imágenes.

15. Pasemos a los números negativos; aquí se requieren mayores precauciones. Se multiplicarán al principio los ejemplos de magnitudes susceptibles de cambiar de sentido, como los segmentos, los ángulos, el tiempo, la temperatura... y sobre esos ejemplos se harán ejercicios de adición y de sustracción. El termómetro está a 4 grados bajo cero, sube o desciende 6 grados ¿cuál será la temperatura? etc. Así preparada la definición de los números negativos, será fácilmente aceptada la de su adición y de su sustracción. La de la multiplicación se reduce en definitiva a la regla de los signos; esta regla será comprendida si las justificáis de dos maneras:

1.º lógicamente, mostrando que ella satisface a las leyes de conmutabilidad y de distribuidad; 2.º por medio de los ejemplos concretos, y de tales ejemplos desearía de dos clases: desde luego, ejemplos geométricos tomados en la teoría de las proporciones y de la semejanza, y que serán la continuación de los que se habrán visto apropósito de los inconmensurables; y después, de los ejemplos tomados de los movimientos uniformes; son los más apropiados para dar una razón concreta de la regla de los signos.

Se ve el rol que en todo ésto desempeñan las imágenes concretas; y este rol está justificado por la filosofía y la historia de la ciencia. Si la aritmética hubiera permanecido fuera de toda mezcla con la geometría, ella no hubiera conocido más que el número entero; es para adaptarse a las necesidades de la geometría que ella ha inventado otra cosa.

16. *Geometría.* — Desde el principio encontramos en geometría la noción de línea recta. ¿Puede definirse la línea recta? La conocida definición, de que es el camino más corto de un punto a otro, no me satisface absolutamente. Partiré simplemente de la *regla*, y mostraré desde luego al alumno cómo puede verificarse una regla por medio de su giro; esta verificación es la verdadera definición de la línea recta; la línea recta es un eje de ro-

tación. Se le enseñaría en seguida a verificar la regla por deslizamiento y se tendría una de las propiedades más importantes de la línea recta. En cuanto a la otra propiedad de ser el más corto camino de un punto a otro, es un teorema que puede demostrarse apodícticamente, pero la demostración es demasiado delicada para que encuentre su sitio en la enseñanza secundaria. Será mejor mostrar que una regla previamente verificada se aplica sobre un hilo tendido. No hay que temer, en presencia de análogas dificultades, multiplicar los axiomas justificándolos por medio de experiencias groseras.

Esos axiomas, y es necesario que se admitan varios, si se admiten en mayor número que el estrictamente necesario, no es tan grande el mal; lo esencial es aprender a razonar justo sobre los axiomas una vez admitidos. El tío Sarcey, que gustaba repetirse, decía con frecuencia que en el teatro el espectador acepta gustoso todos los postulados que al principio se le imponen, pero que una vez levantado el telón, se vuelve intransigente por la lógica. Y lo mismo ocurre con las matemáticas.

Para el círculo, debe partirse del compás; los alumnos reconocerán a primera vista la curva trazada; se les hará observar en seguida que la distancia de las dos puntas del instrumento permanece constante, que una de esas puntas es fija y la otra móvil, y así se llegará, naturalmente, a la definición lógica.

La definición del plano implica un axioma y no hay porque disimularlo. Tómese un tablero de dibujo y hágase notar que una regla móvil se aplica constantemente sobre ese tablero conservando dos grados de libertad. Se compara con el cilindro y el cono, superficies sobre las cuales no puede aplicarse una recta sino a condición de dejarle un solo grado de libertad; después se toman tres tableros de dibujo, mostrando desde luego que ellas se pueden deslizar permaneciendo aplicadas la una sobre la otra, y ésto con tres grados de libertad; y, en fin, para distinguir el plano de la esfera, que dos de esos table-

ros, aplicables sobre un tercero, son aplicables el uno sobre el otro.

Quizá os extrañará este incesante empleo de instrumentos móviles; no es ese un grosero artificio y es mucho más filosófico de lo que aparece a primera vista. ¿Qué es la geometría para el filósofo? Es el estudio de un grupo, y ¿de qué grupo? del de los movimientos de los cuerpos sólidos. Entónces, ¿cómo definir este grupo sin hacer mover algunos cuerpos sólidos?

17. ¿Debemos conservar la definición clásica de las paralelas y decir que así se llaman dos rectas que, situadas en el mismo plano, no se encuentran por más que se prolonguen? No, porque esta definición es negativa, porque ella no es verificable por la experiencia y no podría, por lo tanto, ser considerada como un dato inmediato de la intuición. No, sobre todo, porque ella es totalmente extraña a la noción de grupo, a la consideración del movimiento de los cuerpos sólidos que es, como ya lo he dicho, el verdadero manantial de la geometría. ¿No valdría más definir, desde luego, la traslación rectilínea de una figura invariable como un movimiento en el cual todos los puntos de esa figura son trayectorias rectilíneas; mostrar que semejante traslación es posible haciendo deslizar una escuadra sobre una regla? De esta comprobación experimental, erigida en axioma, sería fácil hacer salir la noción de paralela y el mismo postulado de Euclides.

Para el tercer libro, no temería dar a la homotecia la prioridad sobre la semejanza y considerar casi desde el principio la transformación homotética en toda su generalidad. En la exposición de las teorías geométricas, es preciso evitar que los teoremas aparezcan aislados los unos de los otros y hacer notar bien el hilo que los une. Ahora, cada uno de los libros de geometría es el estudio de un grupo de transformaciones; los teoremas no se suceden al azar; se suceden en un orden que siempre es el mismo: si me permitís emplear un lenguaje muy

diferente del que convendría a la enseñanza, es preciso siempre determinar la estructura del grupo y sus invariantes. Es, pues, ese grupo, que es el lazo aparente oculto de todos los teoremas de un mismo libro; sin pronunciar esa gran palabra «grupo», es fácil dejarla entrever. En los libros precedentes, sólo encaramos el grupo de los desplazamientos de un cuerpo sólido; en el tercer libro se aborda el grupo de las homotecias y el de las semejanzas: es mejor empezar por el primero que es el más simple. El empleo del pantógrafo dará un ejemplo concreto de transformación homotética que fácilmente penetrará en el espíritu de los jóvenes y en él permanecerá.

He dicho que la mayor parte de las definiciones matemáticas eran verdaderas construcciones. Entónces, ¿no conviene hacer desde luego la construcción, ejecutarla ante los alumnos, o mejor hacerla ejecutar de modo que prepare la definición?

18. ¿Es ahora que debe hablarse de los volúmenes y de las superficies? Es demasiado temprano, puesto que para comprender la definición lógica es necesario saber el cálculo integral; no es demasiado temprano, puesto que llegamos al cuarto libro.

¿Qué debemos hacer entónces? Hay que hacer lo que hasta ahora se ha hecho; hay que abstenerse de toda definición de volumen y de superficie; los niños creen saber lo que es, y nada reclaman. Habrá que limitarse a enunciar bajo forma de axiomas esas dos proposiciones que son en realidad una verdadera definición: que dos áreas compuestas de partes iguales, cada una a cada una, tienen la misma superficie; que la superficie de una parte de un área es más pequeña que la superficie del área total. Y lo mismo para los volúmenes.

. . . .

. . . .

22. Ahora, si me decís que todos los métodos que preconizo desde hace mucho tiempo se aplican en los liceos,

me causa más alegría que extrañeza; sé que en su conjunto nuestra enseñanza matemática es buena; no deseo que sufra trastornos, sintiendo que eso sucediera, y sólo deseo mejoramientos lentamente progresivos. No es preciso que esa enseñanza experimente bruscas oscilaciones al soplo caprichoso de modas efímeras. Semejantes tempestades sombrearían muy pronto su alto valor educativo. Una buena y sólida lógica debe continuar a formar su fondo. La definición, por ejemplo, es siempre necesaria, pero ella debe preparar la definición lógica, y no debe reemplazarla: por lo menos ella debe hacerla desear, en el caso en que la verdadera definición lógica no puede ser dada útilmente sino en la enseñanza superior.

Habréis comprendido que lo que hoy he dicho no implica absolutamente el abandono de lo que he escrito en otras ocasiones. Con frecuencia he criticado ciertas definiciones que preconizo hoy. Esas críticas subsisten íntegras. Esas definiciones sólo pueden aceptarse como provisorias; pero por ellas hay que pasar.

XIV

LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DE LAS DERIVADAS Y DE LAS FUNCIONES PRIMITIVAS EN LOS LICEOS DE FRANCIA, Y LOS RESULTADOS OBTENIDOS, POR CH. BIOCHE, PROFESOR DEL LICEO LOUIS-LE-GRAND DE PARÍS. [1]

1. Si se prescinde de algunos hechos excepcionales que he señalado en el informe titulado *Sobre el rango y la importancia de las matemáticas en la enseñanza secundaria de Francia*, puede decirse que antes de 1902 las derivadas sólo figuraban en la enseñanza superior o en la llamada clase de *Matemáticas especiales.*

(1) Este informe fué presentado en el Congreso I. de Enseñanza de las matemáticas, reunido en París en Abril de 1914.

En 1902 la noción de derivada fué introducida en la enseñanza secundaria propiamente dicha: el programa de *Segunda C* y *D* (alumnos de 14 a 15 años) [1] contènia este artículo:

«Noción de la derivada; significación geométrica de «la derivada. El sentido de la variación es indicado por «el signo de la derivada; aplicación a ejemplos numéri- «cos muy simples.»

En 1912, las nociones sobre las derivadas han sido suprimidas del programa de *Segunda* y llevadas al de *Primera*. Véase lo que al respecto contiene el actual programa de *Primera C* y *D:*

«Ecuación del trinomio de segundo grado. Ejemplos nu- «méricos en que la variable puede ser una línea trigo- «nométrica. Noción sobre la derivada; significación geo- «métrica de la derivada; el signo de la derivada indica «el sentido de la variación; aplicación a la variación de «las funciones.

$$\frac{a\,x + b}{a'x + b'} \qquad a\,x^2 + b\,x + c \qquad a\,x + b + \frac{c}{x}$$

«y a la variación de la función $ax^3 + bx^2 + cx + d$ en «la cual los coeficientes son numéricos.

«Estudio de un movimiento rectilíneo, uniforme o uni- «formemente variado. Definición de la velocidad y de la «aceleración en el movimiento rectilíneo por las deri- «vadas.»

Se ve que el programa precisa las funciones simples a las cuales hay que limitarse en la clase de *Primera*. Para esas funciones la expresión $F(x+h) - F(x)$ contiene explícitamente h como factor; puede, pues, simplificarse el cociente $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ y obtener una expresión que tiene un valor bien determinado cuando se hace $h = o$.

(1) 5.° año de estudios secundarios.

En la clase de *Matemáticas*, en la que ingresan los alumnos después de haber pasado por una primera serie de pruebas, para prepararse para la segunda serie del bachillerato, se es conducido a las derivadas para el cálculo de las cuales interviene la noción de límite; se establece, por ejemplo, que la razón del seno al arco tiende hacia la unidad cuando el arco tiende hacia *o*, lo que fácilmente se hace mostrando que $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ hay, pues, de ese punto de vista una diferencia muy clara entre las derivadas consideradas en *Primera* y las que se reservan para la clase de *Matemáticas* (1), en la que los alumnos entran a los 16 años de edad. Véase la parte del programa relativa a las derivadas y a las funciones primitivas:

«Derivadas de una suma, de un producto, de un co-«ciente, de la raíz cuadrada de una función, de $\operatorname{sen} x$. «$\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{catg} x$.

«Aplicación al estudio de la variación, a la investiga-«ción de los máximos y mínimos de algunas funciones «simples, en particular de las funciones de la forma

$$\frac{a x^2 + b x + c}{a' x^2 + b' x + c'} \qquad x^2 + p x + q$$

«en las que los coeficientes tienen valores numéricos,

«Derivada del área de una curva considerada como «función de la abscisa (se admitirá la noción de área).»

Debo citar una nota que precisa el espíritu de la enseñanza de las materias precedentemente enumeradas.

«El profesor dejará de lado todas las cuestiones suti-«les que provoca una exposición rigurosa de la teoría «de las derivadas; tendrá principalmente en vista apli-«caciones y no titubeará en ocurrir a la intuición.»

. . . .

2. La introducción de las derivadas en la enseñanza

(1) Es el 7.° año de estudios secundarios de la *Sección Ciencias*.

elemental tal como resulta de lo que acabo de expresar, ha dado en conjunto buenos resultados. La noción de derivada cuando se evitan sutilezas lógicas, parece muy accesible a los alumnos: éstos se interesan en la aplicación y fácilmente llegan a estudiar funciones simples. Para precisar cito tipos de cuestiones que han sido tratadas por los alumnos de los liceos, y que parecen corresponder bien a lo que se puede pedir a éstos.

I. Deber propuesto en una clase de *Primera C* (alumnos de 15 a 16 años).

Estudiar las variaciones de la función

$$y = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

y construir la curva representativa.

II. Composición propuesta en una clase de *Matemáticas* (16 a 17 años) [duración de la composición, 2 1/2 horas].

Se considera el sólido formado por un cono SAA' y un cilindro $ABB'A'$ que tienen la misma longitud de generatriz $SA = AB = a$.

Sea x la altura SH del sólido.

1.º Expresar el volumen V del sólido por medio de a y de x.

2.º Encontrar para qué valores de x el volumen V es un máximo.

Calcular ese máximo en hectolitros en el caso $a = 1^{m}$.

3.º Construir la curva que representa las variaciones de la función $y = \frac{3V}{\pi a^3}$ representando por a la unidad de longitud gráfica.

4.º Calcular el área comprendida entre la curva y la cuerda, uniendo el punto de abscisa 1 al punto de abscisa 2.

5.º Deducir de la consideración de la curva cuantos valores de x hay para los cuales y toma un valor dado. Calcular los valores de x correspondientes a $y = 3$.

3. Muchas fórmulas de mecánica o de física pueden demostrarse ahora en las clases de los liceos sin que se

tenga necesidad de recurrir a los procedimientos ingeniosos, pero con frecuencia complicados o artificiales, que no podían eludirse antes. Se encontrará la opinión de los profesores expresada en la carta de la que voy a leer algunos extractos. Esta carta es de mi excelente colega M. Vallon, profesor del Liceo Janson de Sailly, presidente de la Unión de los Físicos; éste se ha servido, antes de escribirme, consultar la opinión de sus colegas que constituyen la oficina de la Unión, de modo que el testimonio de M. Vallon tiene una autoridad completamente particular.

« Nos hemos encontrado de acuerdo en cuanto a la « utilidad que para nuestra materia ha resultado de la « introducción de las nociones elementales de cálculo di- « ferencial e integral en la enseñanza secundaria. Alguno « de nuestros colegas que tienen a su cargo, al mismo « tiempo que un curso en un liceo de París un curso de « conferencias complementarias en un liceo de señoritas, « nos señalaba que para las necesidades de la enseñanza « de esas señoritas, se veía obligado a dar esas nociones « elementales: y todos los que antes teníamos que dar « algunas lecciones de mecánica (en *Matemáticas* elemen- « tales, por ejemplo), nos encontrábamos con la misma « obligación; sólo que sucedía con frecuencia que no lla- « máramos las cosas por su nombre. No por eso era « menos necesario mostrar a los alumnos, en el estudio « del movimiento uniformemente variado, por la ecuación « que da las velocidades en función del tiempo y la ecua- « ción que da las distancias al origen, se deducía nece- « sariamente una de otra. Y podría citar otros ejemplos.

« Es ciertamente ventajoso para nosotros encontrar a « nuestros alumnos capaces de utilizar en los casos, sim- « ples por lo demás, en que son necesarios, los métodos « de cálculo de la referencia. ¿Los comprenden bien? « Esto es otra cosa, pero puedo decir que nosotros les « ayudamos, y podemos, a este respecto, invocar su pro- « pio testimonio; nosotros les suministramos, en efecto,

« la ocasión de aplicar a cosas concretas nociones bas-
« tante abstractas.

« Ya veis que la opinión de nuestros colegas es com-
« pletamente favorable a que en los programas se man-
« tengan esas nociones sumarias que, por lo demás, no
« nos parece que presenten dificultades serias para alum-
« nos de esa edad.»

Voy ahora a exponer lo que me parece ser *la opinión general de los profesores de Matemáticas* (opinión que concuerda muy bien con la de sus colegas de física), para poder formular la *conclusión* de este informe.

Para dar buenos hábitos a los alumnos, parece útil no hacer empezar la enseñanza de las derivadas en el momento mismo en que se dan las primeras nociones de las funciones. Con frecuencia se comprueba, en efecto, que los alumnos tienen demasiada fácil tendencia a imaginarse que una función no puede ser estudiada sin que se tenga la necesidad de emplear la derivada. Este abuso no sólo se manifiesta en las clases de enseñanza secundaria, pues se encuentran muchos ejemplos en los concursos en los que ya no son principiantes de matemáticas los que en ellos toman parte. La introducción de las derivadas en los programas de *Segunda Clase* tal como se hizo en 1902 ha sido, desde esa época, juzgada algo prematura por muchos profesores. La modificación que se hizo en 1912 y que consiste en no dar las nociones sobre las derivadas sino a partir de la *Primera Clase*, condujo a un plan de estudios bien graduado; los tres años, a partir del principio del segundo ciclo, están, en efecto, claramente caracterizados.

I. En *Segunda*, edad de 14 a 15 años, los alumnos deben estudiar las funciones simples

$$ax+b \qquad ax^2+bx+c \qquad \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

y familiarizarse con las nociones de mecánica y de representación gráfica.

II. Adquiridas esas nociones, facilitan la exposición que se hace en *Primera* de los principios esenciales de la teoría de las derivadas recurriendo a la intuición y limitándose a casos simples precisados en el programa.

III. En *Matemáticas* [1] el campo de los estudios se amplifica todavía; en este momento los alumnos fácilmente llegan a poder tratar las aplicaciones simples que se encuentran en los problemas de mecánica o de física; por ejemplo, en mi clase de *Matemáticas,* discuto las diferentes formas que puede tomar la curva correspondiente a la ecuación de Von der Waals y establezco la fórmula que da el momento de inercia de una esfera con relación al diámetro; mi colega de física trata en su curso las cuestiones correspondientes, relativas a la teoría de los gases y al péndulo compuesto.

En resumen, parece bien establecido que la introducción de nociones elementales de cálculo diferencial e integral en la enseñanza secundaria ofrece grandes ventajas si esas nociones son introducidas gradualmente y si se utiliza lo más pronto posible para simples aplicaciones prácticas las nociones adquiridas.

---

(1) 7.º año del liceo, sección *Ciencias.*